教師手冊

素養導向高級中學數學教材
機率與二項分布的假設檢定

國家教育研究院

十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

機率與二項分布的假設檢定之素養教材

一、教材設計理念

有關機率主題的教學，在過往的課綱內容是奠基於古典機率的背景條件下進行學習。但是在現實生活中，機率的感覺應該開始於主觀機率，並透過每個人所不斷接收到的訊息進行調整與修改，也就是條件機率的概念。古典機率所強調的是一種機率模型，但是這種機率模型讓學生在學過機率後無法將機率的不確定性特性與生活結合，反而會以為機率是一種定值（例如：投擲一枚公正硬幣，出現正面的機率為$\frac{1}{2}$）。本教材的設計是想要從學生的生活素材出發，引導學生能了解、體會所有的機率應該都是從主觀開始，並可以藉由可取得的相關訊息進行主觀機率的修改，引入條件機率的想法，讓學生更能對於條件機率有所感覺。

108課綱特別在機率教學部分引入機率檢定的教學內容，主要是搭配主觀機率、條件機率的學習歷程，希望透過頻率機率的引入，對前述的主觀機率進行檢定，讓學生能完整的體驗機率概念的完整歷程：猜測（主觀機率）→修正（條件機率）→實驗（頻率機率）→檢定→決策。因此，本教材是以此歷程為設計基礎，並搭配生活情境中所發生的事件（世界盃足球賽）或常見的器材（硬幣或取球活動），讓學生能在教學過程中體驗學習機率的完整發展過程。

二、對應新課程綱要數學學習內容

編號	學習內容條目及說明
D-12甲-2	**二項分布與幾何分布：**二項分布與幾何分布的性質與參數。 **備註：**應用於事件發生機率的合理性檢定。
D-12乙-2	**二項分布：**二項分布的性質與參數。 **備註：**應用於事件發生機率的合理性檢定。

本教材所對應的新課綱條目為12年級，且數甲與數乙皆有討論到二項分布，為離散型隨機變數在高中課程的典範例。本教材透過硬幣、骰子及取球等實驗操作活動，讓學生體驗離散型隨機變數的發生過程，並透過猜測、實驗及檢定的過程，以回應條目之學習內容。

三、教材地位分析

機率教學在高中10、11、12年級各有所安排，希望學生能有機會經常接觸機率相關的概念與素材，適時與生活經驗做連結。在10年級的機率學習內容主要是以古典機率為主，建立學生的機率模型概念；11年級則介紹主觀機率與條件機率的概念，讓學生能了解機率源自於每個人的主觀經驗或猜測，並隨著其他與事件相關的訊息而隨時調整。12年級則聚焦於二項分布，並引入隨機變數的想法。此時可連結10年級與11年級的學習經驗，搭配實驗操作，讓學生對於隨機變數更有感覺，也能再進一步進行假設檢定的初體驗。

四、課程設計

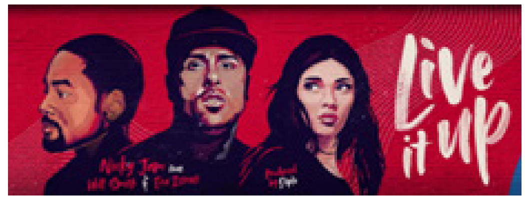
節次	內容介紹
第一節 （實際課堂時間：2節） 世界盃足球賽的預測	1. 利用世界盃足球賽的熱潮做為課程的出發點，幫學生複習排列、組合的基本觀念，以做為後續課程學習的熱身活動。 2. 透過世界盃的比賽情境，適時引入主觀機率的概念，並透過奪冠歷史、賭盤等因素，協助學生建立條件機率的觀念。 3. 以參賽球員的表現作為頻率機率的素材，並藉此探討不同的頻率機率算法間的差異。
第二節 （實際課堂時間：2節） 蜂巢硬幣的猜想	1. 以拉脫維亞所發行的蜂巢硬幣做為討論的素材，利用特殊的硬幣設計引發學生對於硬幣是否公正的猜想，並進行投擲硬幣的實驗與機率猜測值的檢定。 2. 設計白色球及黃色球不均勻的球桶，透過觀察進行主觀機率的預測，再透過實際取球進行實驗，得到實驗數據，藉此判斷主觀機率的正確性，最後再進行所有球數的點數。

教具準備說明

1.世足賽官方主題曲：

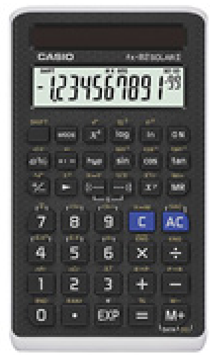
教學現場建議可先播放「2018俄羅斯世足賽主題曲《Live It Up》（放飛自我）」的官方宣傳影片。曲風具有濃厚的拉丁風味，可以讓學生更加融入世足賽的情境中，感受緊張的賽事氛圍。

檔案：2018世足賽官方主題曲Live It Up (Official Video) - Nicky Jam feat. Will Smith & Era Istrefi (2018 FIFA World Cup.mp4



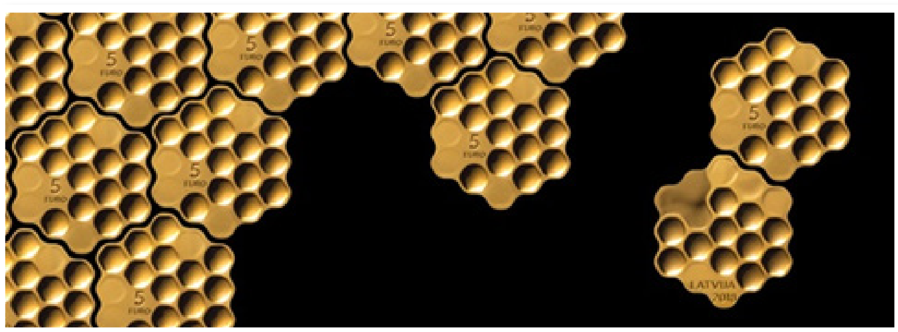
2.科學型計算機：

在教學活動進行中，學生隨時可善用「科學型計算機」，處理較複雜的計算問題。



3.蜂巢硬幣：

拉脫維亞（Latvija）的2018年發行的紀念幣「蜂巢硬幣」



教師可以利用3D列印做出蜂巢硬幣的教具，讓學生分組進行操作。

蜂巢硬幣正面

蜂巢硬幣反面

檔案：蜂巢硬幣.stl

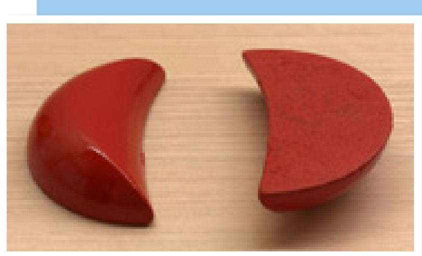
4.取球活動教具：

每組教具：一個透明球桶、兩種不同顏色的球各若干顆、一塊遮透明桶子的布。將兩種不同顏色的球（例如：白球70顆、黃球30顆），混和倒入透明的球桶，先讓學生觀察後，猜測黃球的比例，再用布將球桶遮住，進行後續的取球教學活動。

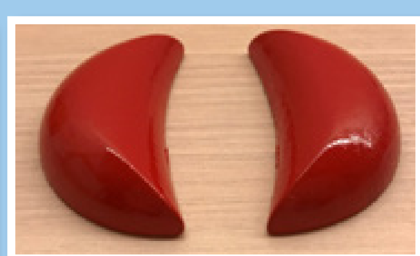
5.神筊：

每組需準備一副神筊教具，可以讓學生實際投擲操作實驗。

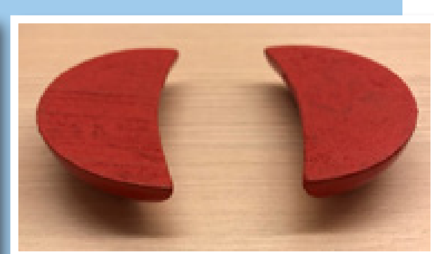
聖筊



陰筊



笑筊



第一節　世界盃足球賽的預測

前情提要

阿笠博士和少年偵探隊柯南、灰原、步美、元太、光彥，正滿心期待的準備觀賞「世界盃足球賽」。

比賽開始前，阿笠博士靈機一動，提議大家來預測本屆世足賽的冠軍隊，答對的人將有阿笠博士準備的神秘小禮物。

【教學建議】

可先播放「2018俄羅斯世足賽主題曲《Live It Up》(放飛自我)」的官方宣傳影片。曲風具有濃厚的拉丁風味，可以讓學生更加融入世足賽的情境中，感受緊張的賽事氛圍。

活動1

阿笠博士說：「目前世足賽前32強已經出爐，小組賽抽籤結果如下表。」

討論1

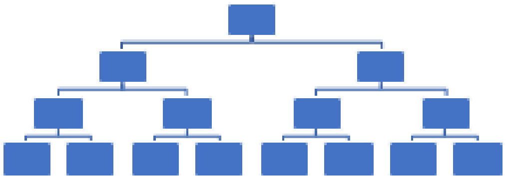
由於將32隊隊伍分組的賽程表較龐大且複雜，我們先嘗試將「8隊隊伍」分組，賽程表如下，請問賽程表有幾種？

【解】

將8隊隊伍，先分成兩大組$\frac{C^8_4 C^4_4}{2!}$，

每大組有4隊，再各分成兩小組$\frac{C^4_2 C^2_2}{2!}$，

左右各一次，共2次



因此，賽程表有$\frac{C^8_4C^4_4}{2\,!}\times\left(\frac{C^4_2C^2_2}{2\,!}\right)^2=315$種。

【另解】

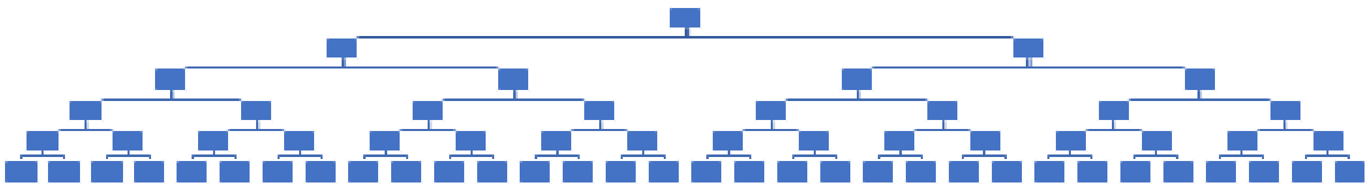
將8隊隊伍，先任意排列有8!

再除以左右互換為同一種賽程2!，共1+2+4=7次。

因此，賽程表有$\frac{8\,!}{(2\,!)^7}=315$種。

討論2

請問將這前32強國家隊伍以抽籤方式分組，賽程表如下，若不考慮Group A、Group B、⋯、Group H的組別名稱差異，出現這個賽程表結果的機率是多少？



請搭配使用科學型計算機，以科學記號表示，並取3位有效數字。

【解】

前32強國家隊伍，先分成兩大組$\frac{C^{32}_{16}C^{16}_{16}}{2\,!}$,

每大組有16個隊伍各分成兩中組$\frac{C^{16}_8C^8_8}{2\,!}$，左右各一次，共2次

每中組有8個隊伍各分成兩小組$\frac{C^8_4C^4_4}{2\,!}$，共4次

每小組有4個隊伍各分成兩小小組$\frac{C^4_2C^2_2}{2\,!}$，共8次

因此，賽程表有$\frac{C^{32}_{16}C^{16}_{16}}{2\,!}\left(\frac{C^{16}_8C^8_8}{2\,!}\right)^2\left(\frac{C^8_4C^4_4}{2\,!}\right)^4\left(\frac{C^4_2C^2_2}{2\,!}\right)^8=1.225298443\times10^{26}$種，

出現這個賽程表結果的機率是$\frac{1}{1.225298443\times10^{26}}\fallingdotseq8.16\times10^{-27}$。

【另解】

前32強國家隊伍分組，先任意排列32!

再除以左右互換為同一種賽程2!，共1+2+4+8+16=31次。

因此，賽程表有$\frac{32!}{(2\,!)^{31}}=1.225298443\times10^{26}$。

出現這個賽程表結果的機率是$\frac{1}{1.225298443\times10^{26}}\fallingdotseq8.16\times10^{-27}$。

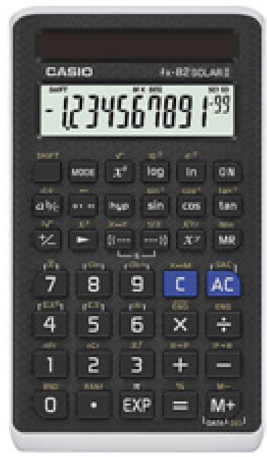
討論3

少年偵探隊花了不少時間，總算把出現這種賽程表的機率算出來。
柯南說：「我們利用『**古典機率**』算出出現這種賽程表的機率。」
請問：什麼是「**古典機率**」呢？

【解】

「古典機率」是指

若樣本空間 S 有 n 個元素，且每個元素出現的機會均等。
若 A 為一事件，且 A 有 k 個元素，
則定義「事件 A 發生的機率」為 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{k}{n}$。



【教學補充】

1. 機率理論可以分為主觀理論與客觀理論，
   其中客觀機率，又可分為「古典機率」與「頻率機率」。
   本題設計為古典機率的複習。
2. 此活動教師可以引導學生發表不同的解法。
3. 進行活動解題時，可搭配科學型計算機處理較複雜的計算。
   此活動需會使用 $\boxed{nCr}$ 或 $\boxed{x!}$ 的功能計算。

活動2 猜猜奪冠熱門隊？

討論1

阿笠博士問：「你們覺得德國隊衛冕的機率有多高？」

【解】

每個人的答案都不同，有人從支持者的角度出發，有人從世界排名的角度出發，這正是生活中常見的「**主觀機率**」。

討論2

每個人都有一套模式，來計算「**德國隊衛冕的機率**」。

步美好奇想知道歷屆的世界盃得獎隊伍，因此搜尋前幾屆的得獎隊伍，資料如下：

【2014世界盃足球賽】	【2010世界盃足球賽】	【2006世界盃足球賽】
冠軍：德國	冠軍：西班牙	冠軍：義大利
亞軍：阿根廷	亞軍：荷蘭	亞軍：法國
季軍：荷蘭	季軍：德國	季軍：德國
殿軍：巴西	殿軍：烏拉圭	殿軍：葡萄牙

【2002世界盃足球賽】	【1998世界盃足球賽】	【1994世界盃足球賽】
冠軍：巴西	冠軍：法國	冠軍：巴西
亞軍：德國	亞軍：巴西	亞軍：義大利
季軍：土耳其	季軍：克羅埃西亞	季軍：瑞典
殿軍：韓國	殿軍：荷蘭	殿軍：保加利亞

步美說：「上屆冠軍德國隊，還有巴西、西班牙、阿根廷、法國隊，都是奪冠的熱門。」

柯南說：「世界盃足球賽分組抽籤結果出爐，各大博奕公司馬上公布32強奪冠賠率。大家可以參考看看這些資料。」

32強奪冠賠率前10熱門

球隊	台灣運彩	日博bet365	立博Lodbrokes
巴西	4.25	5	5
德國	4.75	5.5	5.5
法國	6	7.5	7
西班牙	7.5	7	7
阿根廷	8.5	10	10
比利時	11	12	11
英格蘭	16	17	15
葡萄牙	22	26	26
烏拉圭	28	29	26
克羅埃西亞	28	34	34

【註】賠率隨時變動，以官方網站為準。若以台灣運彩，預測巴西奪冠為例，
賠率4.25表示若押中，押100元可拿回425元，淨賺325元。

柯南說：「世界盃足球賽這32支隊伍，曾5度奪冠的巴西依舊是冠軍大熱門；上屆冠軍德國，看好度也高居第二。法國、西班牙、阿根廷等傳統強權，也都有機會踢進最後4強。」

阿笠博士問：「你們現在覺得**德國隊衛冕**的**機率**是否需要調整呢？」

【解】

鼓勵學生說明自己如何選取、分析資料，解釋如何計算出德國隊奪冠的機率。

【教學補充】

1. 主觀機率 (Subjective Probability)的概念是一個事件發生的機率，是由人類的經驗或心理的感覺所決定。當某件事在過去沒有太多或是根本沒有經驗可以參考時，就必須主觀地判定或猜測。
2. 從各階段比賽過程或藉由賭盤、賠率的變化，機率也會逐漸修正答案。本題設計為多給予一些訊息或條件時，也是生活中常見的條件機率觀念。建立學生機率的核心精神：「不確定性」。

活動3 賭盤玄機

經過激烈的比賽，呼聲很高的德國隊竟然意外出局！接著，進入前8強的爭奪戰⋯

前16強	比數	前8強
法國 v.s. 阿根廷	4 : 3	法國
烏拉圭 v.s. 葡萄牙	2：1	烏拉圭
西班牙 v.s. 俄羅斯	1：1 pk賽3：4	俄羅斯
克羅埃西亞 v.s. 丹麥	1：1 pk賽3：2	克羅埃西亞
巴西 v.s. 墨西哥	2：0	巴西
比利時 v.s. 日本	3：2	比利時
瑞典 v.s. 瑞士	1：0	瑞典
哥倫比亞 v.s. 英格蘭	1：1 pk賽3：4	英格蘭

元太說：「哇！巴西隊似乎很強，一路過關挺進前8強了。」

討論1

阿笠博士說：「世界杯足球賽進入最後關頭，除了全世界的球迷為之瘋狂外，賭盤也熱鬧非凡。『足厲害』運彩公司公布了『世足賽前八強奪冠賠率』，如下表。」

世足賽前八強奪冠賠率

國家	法國	烏拉圭	俄羅斯	克羅埃西亞	巴西	比利時	瑞典	英格蘭
賠率	1賠3.7	1賠12	1賠18	1賠6	1賠3.1	1賠5.2	1賠22	1賠4.3

光彥說：「到底賭盤賠率是怎麼算出來的？」

灰原說：「賠率的計算，簡單地說就是：賠率$=\dfrac{1}{\text{奪冠機率}}$。」

光彥說：「『奪冠機率』又是如何產生的？」

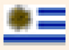
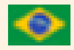
灰原說：「『奪冠機率』是從很多個下注者（博弈者）的主觀機率統計出來的。」

阿笠博士說：「大家依據奪冠賠率，換算出各國家代表隊的奪冠機率。」

（四捨五入約到百分位）

【解】已知賠率，則奪冠機率$=\dfrac{1}{\text{賠率}}$

世足賽前八強奪冠賠率

國家	法國	烏拉圭	俄羅斯	克羅埃西亞	巴西	比利時	瑞典	英格蘭
								
賠率	1賠3.7	1賠12	1賠18	1賠6	1賠3.1	1賠5.2	1賠22	1賠4.3
奪冠機率	27%	8%	6%	17%	32%	19%	5%	23%

討論2

光彥說：「好奇怪喔！八隊奪冠機率的總和大於1呢！」

步美說:「我想根據剛算出的奪冠機率，按照比例同時下注，應該可以賺大錢吧！」

請幫他們想一想是否合理？

【解】

八隊奪冠機率的總和為137%，大於1。

若賭客根據奪冠機率同時下注：

法國27元、烏拉圭8元、俄羅斯6元、…、英格蘭23元，共需花費137元。

無論哪一隊奪冠都大約可贏回100元，因此大約必虧損37元，莊家大約可賺37元。

【教學補充】

1. 由於奪冠機率是四捨五入後的結果，所以賭客贏回金額不一定剛好100 元。
2. 機率總和大於 1，可以「證明」莊家做了手腳，表示他們公布的「賠率」可能不是博弈者的真正意志。但從商業眼光來看，這也是無法避免的。
3. 若只是兩隊交手賭輸贏，算法也相同，只是把「奪冠」改為「獲勝」。

活動4

世界杯足球賽吸引著全世界球迷的目光，各國也出現了出色的球星。

步美說：「克羅埃西亞的表現出乎意料，我最喜歡隊長莫德里奇（Luka Modric）了！」

元太說：「眾多球星，你為什麼最喜歡莫德里奇？」

步美說：「莫德里奇的『傳球成功率』很高，實在太帥了！」

元太說：「所謂的『傳球成功率』是怎麼算出來的呀？」

討論1

克羅埃西亞隊長莫德里奇在世界盃表現出色，成為金球獎得主。

根據賽後資料統計，本屆世界盃莫德里奇的傳球情況

世界盃比賽	莫德里奇的傳球情況
前32強~對戰奈及利亞之役	全場完成63次傳球，成功傳球54次。
前8強~對戰俄羅斯之役	全場完成102次傳球，成功傳球89次。
前4強~對戰英格蘭之役	全場完成71次傳球，成功傳球63次。

阿笠博士問：「根據賽後資料，請算看看這三場比賽，莫德里奇的傳球成功率分別是多少？」（四捨五入約到千分位）

【解】

世界盃比賽	莫德里奇的傳球情況	傳球成功率
前32強~對戰奈及利亞之役	全場完成63次傳球，成功傳球54次。	$\frac{54}{63}\times100\%\fallingdotseq85.7\%$
前8強~對戰俄羅斯之役	全場完成102次傳球，成功傳球87次。	$\frac{87}{102}\times100\%\fallingdotseq85.3\%$
前4強~對戰英格蘭之役	全場完成71次傳球，成功傳球63次。	$\frac{63}{71}\times100\%\fallingdotseq88.7\%$

【教學補充】

1. 複習「頻率機率」。頻率機率的理論源自相對次數。事件的發生機率是由過去相似事件發生的次數與觀測的總次數比；當觀測的次數越多，機率值也就越準確（大數法則）。
2. 學生可使用計算機。

討論2

柯南說：「我們根據賽後資料，藉由過去事件發生的成功次數與總次數比，所計算出來的傳球成功率就是『頻率機率』。」

灰原說：「當觀測的次數越多，機率值也就越準確。」

阿笠博士問：「我們將這三場的比賽資料合併，莫德里奇的傳球成功率是多少？」

【解】

三場共完成236次傳球，成功傳球204次。

傳球成功率 $\frac{204}{236} \times 100\% \fallingdotseq 86.4\%$。

討論3

步美說：「若進一步直接計算三場成功率的平均值，我得到成功率為86.6％，哪一種算法較合理呢？」

【解】

請學生發表意見與想法，說明理由。

【參考解答】

討論2中，這三場的比賽資料合併，所得頻率機率較為客觀。

可以避免討論3中，若發生某場比賽全場傳球數偏低或狀況不佳，所得傳球成功率過低。

如此直接平均的數值將造成過大影響。

後記：

少年偵探隊熱情參與阿笠博士的預測「世界盃足球賽」遊戲，過程中學習到日常生活的機率分為「主觀機率」與「客觀機率」，而「客觀機率」又分為「古典機率」與「頻率機率」。

阿笠博士開心地宣布神秘禮物是「拉脫維亞之旅」，決定帶少年偵探隊到拉脫維亞旅行，希望在享受異國風情的同時，順便尋找創造發明的新點子。

然而，柯南心中卻存著疑慮，深知真實生活中處處充滿不確定性，當每個人做出機率的猜測後，又該怎麼判斷這個猜測是否合理呢？也許在未來的旅程中，可以找到答案吧！

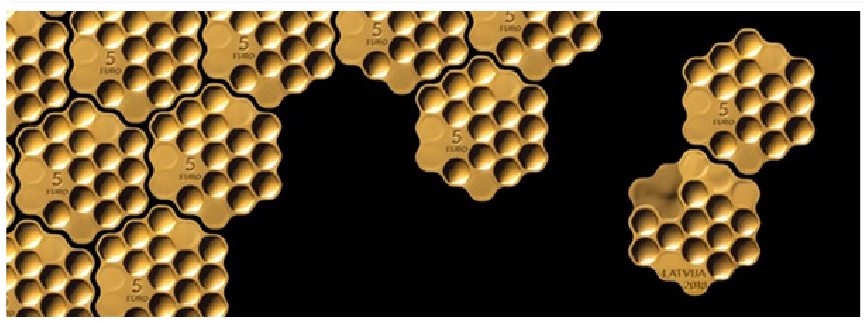
第二節　蜂巢硬幣的猜想

阿笠博士和少年偵探隊柯南、灰原、步美、元太、光彥一行人，興高采烈地開啟「拉脫維亞之旅」。拉脫維亞（Latvija）是位於波羅的海東岸的北歐國家，首都里加（Riga）是北歐地區波羅的海國家中最大、最繁忙的城市。

阿笠博士等人在里加（Riga）欣賞著北歐城市的風情。此時，柯南意外發現2018年發行的紀念幣「蜂巢硬幣」。

活動1　蜂巢硬幣的猜想

柯南手裡拿著奇特的硬幣說：「這款蜂巢形狀的硬幣可以拼圖耶！」



步美不禁大喊：「哇！好特別喔！」

灰原好奇的觀察蜂巢硬幣，驚呼：「硬幣正反兩面的設計，也富有巧思與創意！」

硬幣正面

蜂巢格子組成了拉脫維亞國土輪廓以及首都里加海灣的外形。硬幣銘文“LATVIJA”印製在硬幣左下方，最底部則印有發行年份 2018。

硬幣背面

同樣為蜂巢格圖案，其中 5 個蜂巢格被覆蓋，象徵著硬幣面值 5 歐元。面值 5 同樣印在左下方，最下方則印有貨幣單位“euro（歐元）”。

【教學補充】

這款蜂巢形狀硬幣是由出生於拉脫維亞，並活躍於英國倫敦的設計師 Arthur Analts 所設計的5 歐元硬幣，且已經在 2018 年由拉脫維亞銀行正式發行。

討論1

正當大家驚奇的欣賞著這特別的蜂巢硬幣時，

柯南拿著一枚硬幣說:「你們猜看看，投擲一枚蜂巢硬幣出現正面的機率是多少？」

【解】

數學裡常給假設，在某些假設下進行推導或證明。

但在真實的生活裡，問題存有真實的答案，但通常不知道這個數值為何。

教師進行教學時，鼓勵學生猜想，並發表想法。

最後視各組的討論結果，做出蜂巢硬幣正面機率的「假設」。

例如：「各組的猜想大多接近 $\frac{1}{2}$，那我們假設蜂巢硬幣出現正面的機率為 $\frac{1}{2}$ 好了！」

討論2

元太說：「兩面看起來差不多啦！我猜正反兩面的機率各占 $\frac{1}{2}$。」

光彥說:「才怪，兩面的蜂巢格數目不同，正面有11個蜂巢格，反面有14個蜂巢格。我覺得正面的機率是 $\frac{11}{25}$。」

步美說：「蜂巢格分布的位置不同，可能會影響擲出正面的機率呀！」

每個人都有自己的看法與論點，正當大家爭論不休時~

阿笠博士說：「我們來動手試驗看看，分工合作投擲一枚蜂巢硬幣20、30、40次，觀察出現正面的次數，並算出出現正面的頻率！」

【解】

	20次	30次	40次
擲出正面的次數			
正面的機率			

讓各組學生分工合作，動手投擲蜂巢硬幣20、30、40次，

分別算出擲出正面的次數，並計算出正面的機率，稱為「樣本估計值」。

並觀察一下，「次數」對於「正面的機率」的影響。

【教學說明】教師可以利用3D列印做出蜂巢硬幣的教具，讓學生分組進行操作。

蜂巢硬幣正面

蜂巢硬幣反面

討論3

柯南說：「每次試驗的結果會不同，所以樣本資料會有誤差存在。

即使假設是正確的，樣本估計值也不會剛好等於假設。」

步美說：「那該如何判斷我的猜想是否可以接受呢？」

阿笠博士說：「我們可以看**試驗的結果**與**猜想假設**的差異有多大。

當樣本估計值與假設的機率之間差異不大，則**不拒絕假設**。

當差距夠大了，則做出**拒絕假設**的結論。」

柯南說：「這一連串的試驗與決策過程就是推論統計的『假設檢定』呀！」

步美說：「什麼是『假設檢定』？」

灰原說:「『假設檢定』是針對提出的假設，稱為『母體參數』，依據試驗所得的『樣本估計值』，來推論母體參數的真實值，並決定是否拒絕這個假設。」

阿笠博士說：「沒錯！假設檢定有四步驟：**猜想→收集資料→檢定→決策**。」

(1)請思考一下，為何需要「假設檢定」呢？「假設檢定」的使用時機為何？

【解】

由於每個人的猜想皆不同，而且試驗的結果與猜想難免會有差異。

當我們對於「猜想存疑慮」時，便要著手檢驗一下假設。

元太說：「樣本估計值與假設的機率之間差異多少時，才算夠大？

像我猜正面的機率$\frac{1}{2}$，該怎麼設定拒絕假設的標準呢？」

阿笠博士說：「拒絕假設的標準是由檢驗者預先設定『拒絕假設的機率』，檢定方式如下～」

(2)若依據元太的假設正面的機率$\frac{1}{2}$，元太投擲一枚蜂巢硬幣20次。

令隨機變數X表示出現正面的次數，分別寫出X的機率質量函數？

並作出X的機率分布圖。

【解】

若投擲一枚蜂巢硬幣20次，設正面的機率$\frac{1}{2}$，則$X \sim B(20,\frac{1}{2})$，

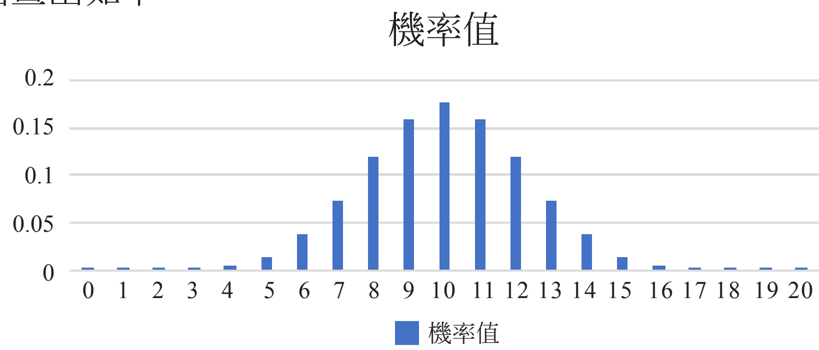
$P(X=k)$表示恰有k次成功的機率，即$P(X=k)=C_k^{20}(\frac{1}{2})^k(1-\frac{1}{2})^{20-k}$

則隨機變數X的機率質量函數$f(k)=C_k^{20}(\frac{1}{2})^k(1-\frac{1}{2})^{20-k}$，其中$k=0,1,2,\cdots,20$，

成功次數k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
機率	9.54E-07	1.91E-05	0.000181	0.001087	0.004621	0.014786	0.036964	0.073929	0.120134	0.160179	0.176197

成功次數k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
機率	0.160179	0.120134	0.073929	0.036964	0.014786	0.004621	0.001087	0.000181	1.91E-05	9.54E-07

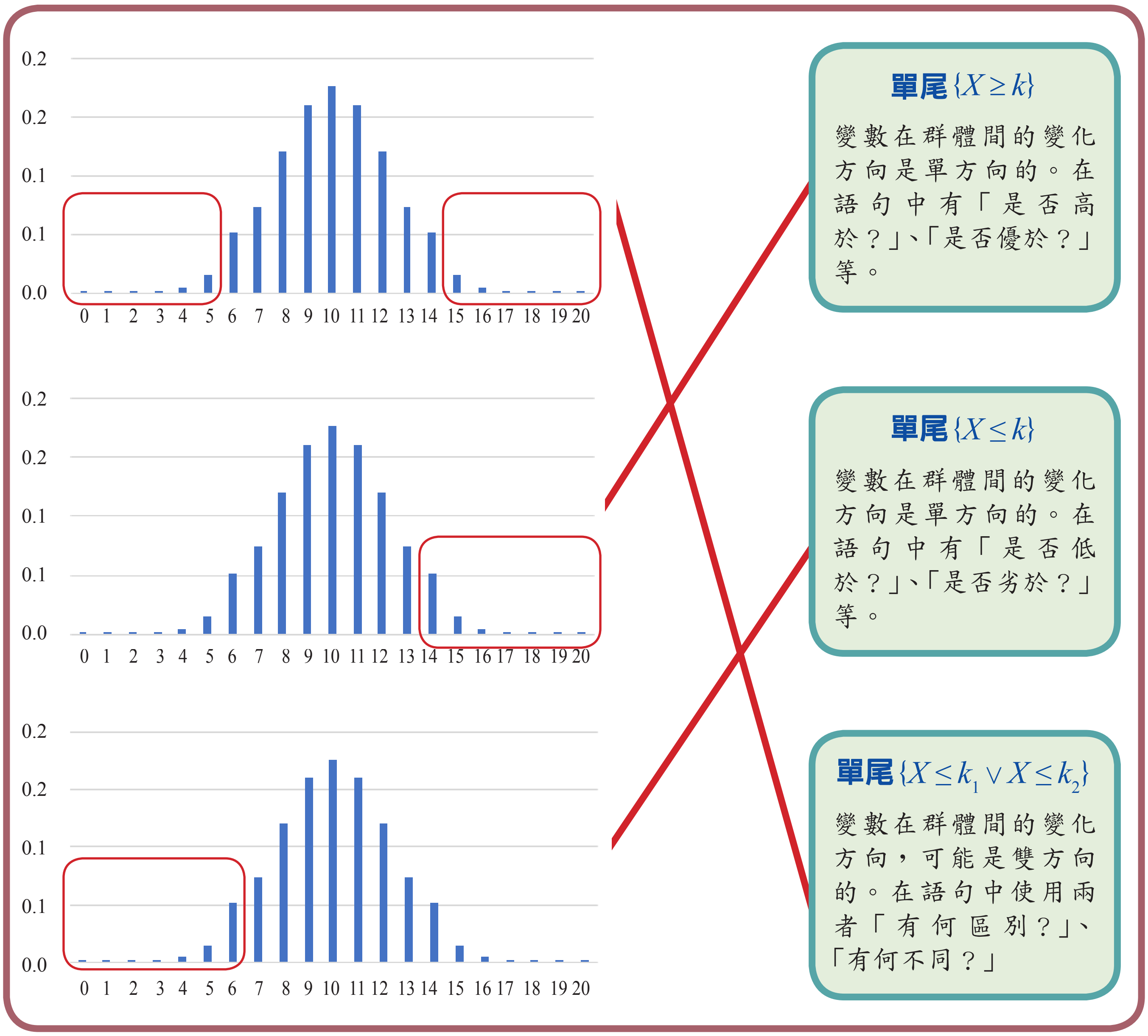
將機率分布圖畫出如下：



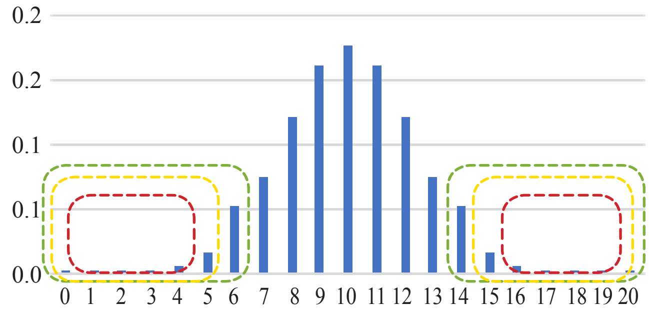
(3)接下來，請為此次隨機試驗設定<u>拒絕假設的機率 α</u>，並決定<u>拒絕假設的區域</u>。

依據問題可以選單尾 $\{X\geq k\}$、$\{X\leq k\}$ 或雙尾 $\{X\geq k_1 \vee X\leq k_2\}$ 作為合適的拒絕區域，且<u>拒絕區域範圍內的機率總和恰為設定拒絕假設的機率 α</u>。

連連看：請將機率分布圖與拒絕區域，左右配對！



(4)阿笠博士說：「如果設定拒絕假設的機率 α 為0.1。現在想檢驗『擲出正面的機率為0.5』的假設，所以選取雙尾$\{X \geq k_1 \vee X \leq k_2\}$作為拒絕區域。並且**拒絕區域範圍內的機率總和恰為設定拒絕假設的機率** α**=0.1**。」



若元太投擲一枚蜂巢硬幣20次，擲出6次正面，且拒絕假設的機率 α ＝0.1。

請在機率分布圖上，畫出雙尾的拒絕區域！

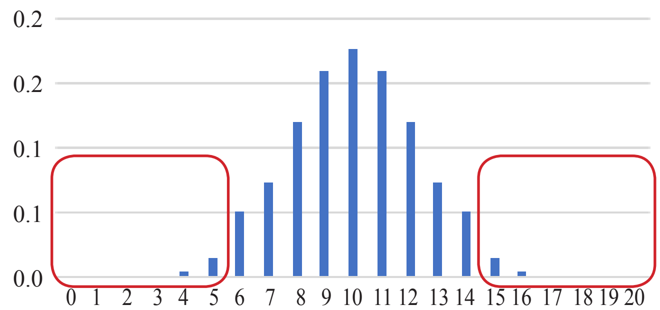
【解】

設定拒絕假設的機率 α=0.1，且選取雙尾 $\{X \geq k_1 \vee X \leq k_2\}$ 作為拒絕區域。

拒絕區域 $\{X \geq 15 \vee X \leq 5\}$，$\sum_{k=0}^{5} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20} + \sum_{k=15}^{20} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20} \fallingdotseq 0.02069 \times 2 < 0.1$。

而拒絕區域 $\{X \geq 14 \vee X \leq 6\}$，$\sum_{k=0}^{6} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20} + \sum_{k=14}^{20} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20} \fallingdotseq 0.057 \times 2 < 0.1$。

所以，拒絕區域為 $\{X \geq 15 \vee X \leq 5\}$，拒絕區域如下圖：



(5)根據機率分布圖上所畫出的**拒絕區域**，請問元太擲出6次正面，是否拒絕假設呢？

如果灰原的猜想、試驗次數、拒絕機率 α 與拒絕區域類型都和元太相同，但是灰原擲出5次正面，是否拒絕假設呢？

【解】

設定拒絕假設的機率 α=0.1，且選取雙尾作為拒絕區域。

$\sum_{k=0}^{5} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20} + \sum_{k=15}^{20} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20} \fallingdotseq 0.02069 \times 2 < 0.1$且$\sum_{k=0}^{6} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20} + \sum_{k=14}^{20} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20} \fallingdotseq 0.057 \times 2 < 0.1$

所以，拒絕區域為 $\{X \geq 15 \vee X \leq 5\}$

因此，元太擲出6次正面，不在拒絕區域，則**不拒絕假設**。

而灰原擲出5次正面，在拒絕區域，則**拒絕假設**。

【教學說明】

1. 設定能容忍錯誤的機率，以 α 表之。常取的 α 值為0.01，0.05，或0.1等。
2. 訂定拒絕假設的範圍，依據問題情境可以選單尾 $\{X\geq k\}$、$\{X\leq k\}$、或雙尾 $\{X\geq k_1 \vee X\leq k_2\}$ 的拒絕區域。

討論4

柯南說：「我們各自試試設定拒絕假設的機率，並檢驗是否拒絕自己的假設吧！」請將你的假設檢定過程記錄下來！

【解】

1. 我猜測投擲一枚蜂巢硬幣出現正面的機率是____________。
2. 投擲一枚蜂巢硬幣____________次，觀察出現正面有____________次。
   因此，此次試驗出現正面的機率是____________。
3. 令隨機變數 X 表示出現正面的次數，則 $X\sim B($________ , ________$)$，
   $P(X=k)$表示恰有 k 次成功的機率，即 $P(X=k)=$____________，
   則隨機變數 X 的機率質量函數 $f(k)=$ ____________，其中 $k=0,1,2,\cdots,$ ____。

成功次數k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
機率											

成功次數k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
機率										

成功次數k										
機率										

成功次數k										
機率										

作出 X 的機率分布圖～

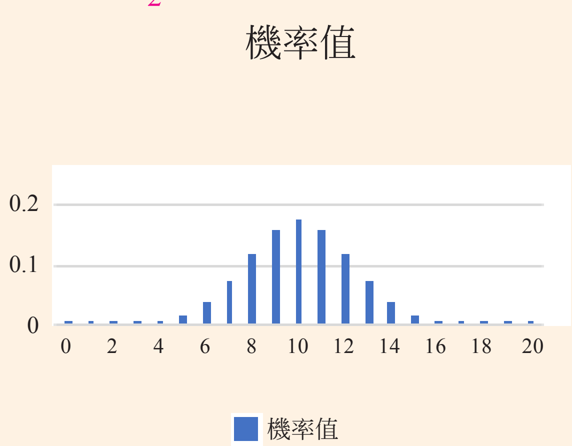
4. 設定**拒絕假設的機率** $\alpha=$__________，並決定**拒絕假設的區域**為__________。

5. 請做出決策，說明是否拒絕你的假設呢？

【教學說明】

1. 各組學生分工合作，將投擲硬幣20、30、40次，分別寫出 X 的機率質量函數。
   學生可用計算機輔助計算後，畫出 X 的機率分布圖。
2. 若成功機率相同，投擲硬幣的次數不同，二項分布的機率分布圖也會有差異。

$X\sim B(20,\frac{1}{2})$

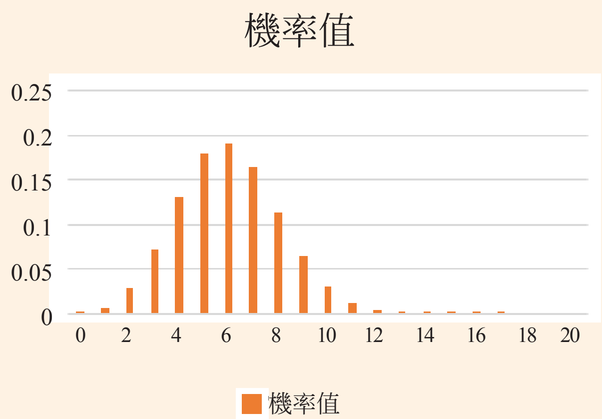


$X\sim B(30,\frac{1}{2})$

$X \sim B(40, \frac{1}{2})$

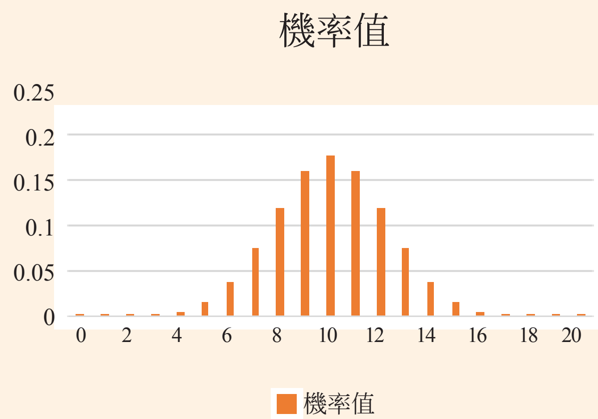
3. 若投擲硬幣的次數相同，成功機率不同，二項分布的機率分布圖也會有差異。

$X \sim B$ (20,0.3)

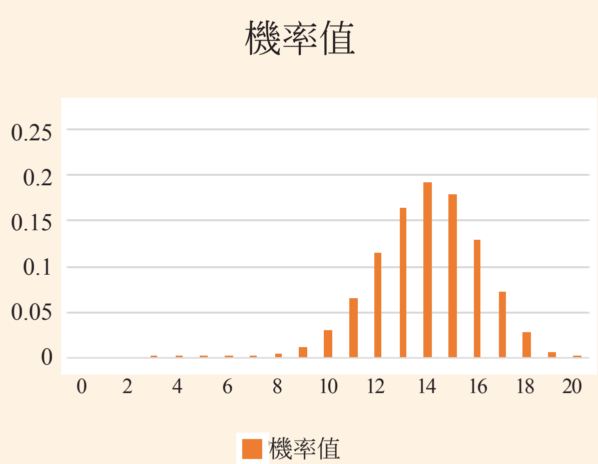


右偏分布

$X \sim B$ (20,0.5)



$X \sim B$ (20,0.7)



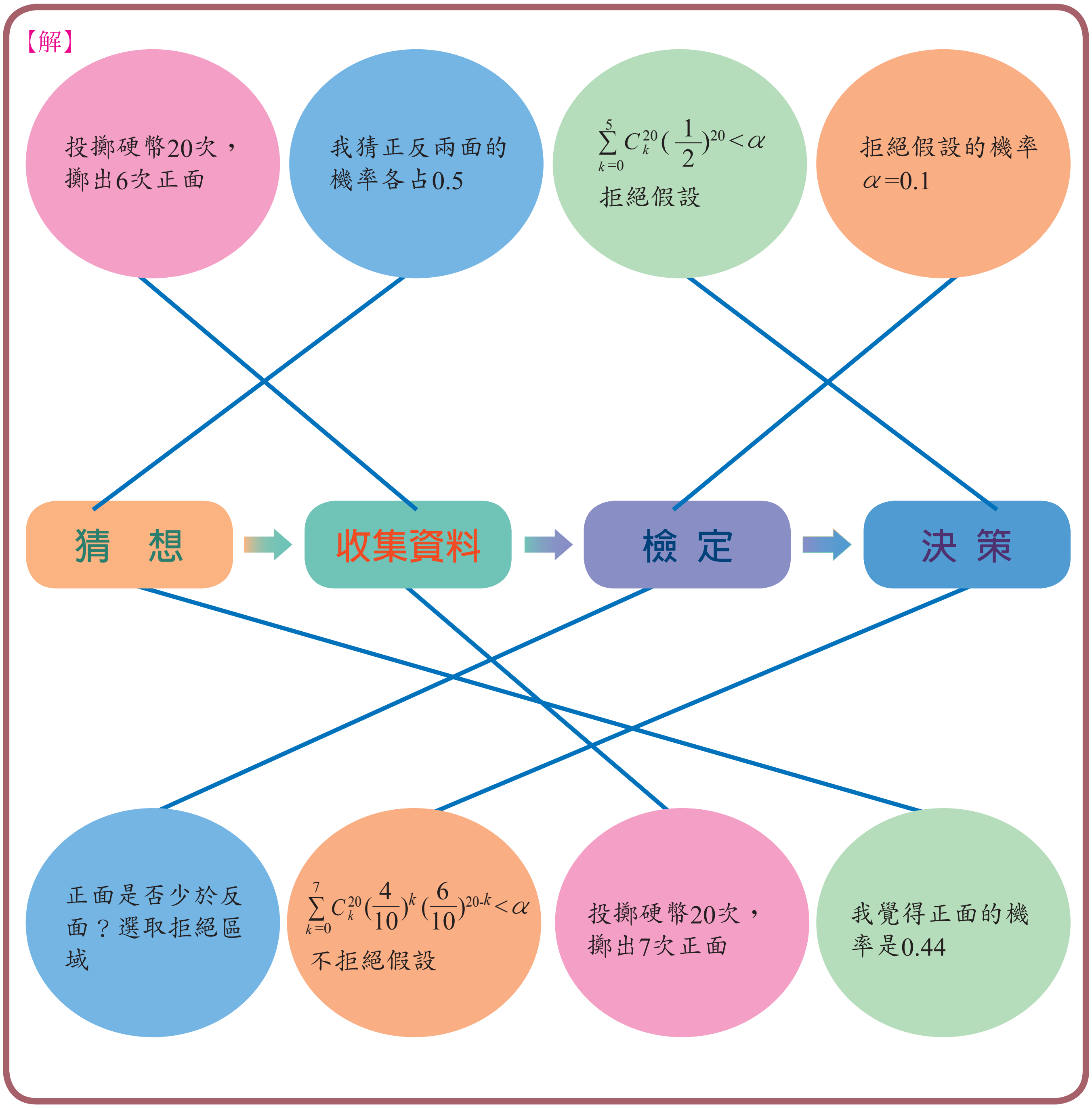
左偏分布

4. 當二項分布的機率分布圖為左偏分布或右偏分布時，若設定拒絕假設的機率為 α ，且選取雙尾 $\{X \geq k_1 \vee X \leq k_2\}$ 作為拒絕區域，則左右拒絕區域範圍內的機率總和皆為 $\frac{1}{2}\alpha$ 。

活動2

假設檢定的四個步驟：**猜想→收集資料→檢定→決策**。

連連看：請將蜂巢硬幣的試驗過程與『假設檢定』的流程做對照與比較。



活動3

某天，步美拿著兩袋不同顏色的球，混合倒入一個桶子中，突然驚呼「啊！我剛忘記先數數看兩種顏色的球分別各有幾顆了！」

灰原拿著裝著兩種顏色球的桶子說：「沒關係！正好可以來玩『神預測』遊戲，看誰預測能力較準喔！」

【教學說明】

1. 教師需要準備教具(每組)：一個透明桶子、兩種不同顏色的球各若干顆、一塊遮透明桶子的布或紙。
2. 教師在課堂上，將兩種不同顏色的球（例如：白球70顆、黃球30顆），混和倒入透明的球桶，先讓學生觀察後，猜測黃球的比例，再用布將球桶遮住，進行後續的取球教學活動。

討論1

請猜猜看，黃色球佔全部球個數的比例是多少呢？

【解】

我猜黃色球佔全部球個數的比例是__________。

討論2

柯南說：「利用『**假設檢定**』的方法，來檢驗是否拒絕自己的假設呢？」

(1)從桶子中，每次取一球，取後觀察顏色後**放回**，重複取 n 次，算出此試驗取出黃球的次數？

【解】

重複取__________次球，其中取出黃球有__________次。

此試驗取出黃球的樣本比例是__________。

討論3

⑴令隨機變數 X 表示黃球的球數，則 $X\sim B(n,p)$，請寫出 X 的機率質量函數？並作出 X 的機率分布圖。

【解】

令隨機變數 X 表示出現正面的次數，則 $X\sim B($ ______ , ______ $)$ ，

$P(X=k)$ 表示恰有 k 次成功的機率，即$P(X=k)=$____________ ，

則隨機變數 X 的機率質量函數 $f(k)=$____________ ，其中 $k=0,1,2\cdots,$ _____ 。

成功次數k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
機率											

成功次數k										
機率										

作出 X 的機率分布圖～

⑵請為此次隨機試驗設定**拒絕假設的機率 α**，並且決定**拒絕假設的區域**。

【解】

設定**拒絕假設的機率** α 為____________ ，且決定**拒絕假設的區域**為____________ 。

⑶請繼續將檢定過程記錄下來，並做決策是否拒絕假設呢？

【解】

討論4

灰原說：「現在我們實際數看看球桶中，黃色球佔全部球個數的比例是多少！」

請各組分別數出球桶中，黃色球佔全部球個數的比例，並驗證看看與假設檢定結果的差異。

【解】

～課後練習活動～

★真的好神！

阿笠博士和少年偵探隊等一行人來到美麗的寶島「台灣」。他們一行人來到「好神廟」裡祈求好運氣，恰巧廟裡舉辦擲「好神筊」送「好神氣球」活動。

「好神廟」擲「好神筊」活動

比賽辦法：每組10人，投擲「好神筊」20次，

擲出「聖筊」次數最多者獲勝，

就可以將「好神氣球」帶回家。

元太直呼：「好神筊的形狀好像月亮呀！但是兩面不同，一面是凸的，另一面卻是平的耶！」

步美說：「好神筊擲出『聖筊』的機率是多少？」

柯南說：「我們可以先『猜想』，再利用『假設檢定』來判斷是否拒絕猜想呀！」

討論 1

請「猜想」好神筊擲出「聖筊」的機率，並**投擲「好神筊」20次**。依照假設檢定的流程:「**猜想→收集資料→檢定→決策**」，來判斷是否拒絕**猜想**？並將過程記錄下來。

【參考解答】

1. 猜想

若猜測好神筊擲出「聖筊」的機率是 $\frac{1}{2}$ 。

2. 收集資料

投擲「好神筊」20次，觀察出現「聖筊」有____________次。

此試驗擲出「聖筊」的機率是____________。

3. 檢定

猜測好神筊擲出「聖筊」的機率是 $\frac{1}{2}$，且投擲「好神筊」20次

則 $X \sim B(20, \frac{1}{2})$ 。

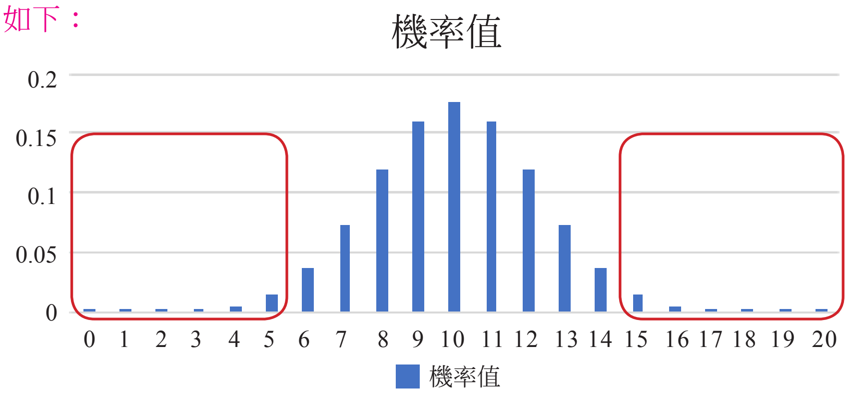
若 $P(X=k)$ 表示恰有 k 次成功的機率，即 $P(X=k)=C_k^{20}\,(\frac{1}{2})^k\,(1-\frac{1}{2})^{20-k}$

則隨機變數 X 的機率質量函數 $f(k)=C_k^{20}\,(\frac{1}{2})^k\,(1-\frac{1}{2})^{20-k}$，其中 $k=0,1,2,\cdots,20$，

成功次數k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
機率	9.54E-07	1.91E-05	0.000181	0.001087	0.004621	0.014786	0.036964	0.073929	0.120134	0.160179	0.176197

成功次數k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
機率	0.160179	0.120134	0.073929	0.036964	0.014786	0.004621	0.001087	0.000181	1.91E-05	9.54E-07

將機率分布圖畫出如下：



若設定拒絕假設的機率 $\alpha=0.1$，且選取 $\{X \geq k_1 \vee X \leq k_2\}$ 作為拒絕範圍區域。

$$\sum_{k=0}^{5} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20}+\sum_{k=15}^{20} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20} \fallingdotseq 0.02069 \times 2<0.1$$

$$\sum_{k=0}^{6} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20}+\sum_{k=14}^{20} C_k^{20}(\frac{1}{2})^{20} \fallingdotseq 0.057 \times 2<0.1$$

所以，拒絕區域為 $\{X \geq 15 \vee X \leq 5\}$

4. 決策

因此，若擲出6~14次聖筊，不在拒絕區域內，則**不拒絕假設**。

反之，若擲出0~5次或15~20次聖筊，在拒絕區域內，則**拒絕假設**。

素養導向數學教材　/ 單維彰　主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院， 2019.12

1. 數學教育
2. 中學數學
3. 教材與教法

發 行 人：郭工賓
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組
召 集 人：單維彰
副召集人：林碧珍、鄭章華（依姓氏筆劃順序排列）
編輯小組：施羿如、晏向田、許曉芸、陳宗賢、陳彥霖、陳維民、陸昱任、曾明德、曾俊雄、歐志昌、鄧家駿、簡秀純（依姓氏筆劃順序排列）
作　　者：施羿如、歐志昌（依姓氏筆劃順序排列）
執行編輯：江增成、張淑娟、梁雅婷、蔡敏冲、盧培春（依姓氏筆劃順序排列）
出版年月：108 年 12 月
版　　次：初版
電子全文可至國家教育研究院網站 *http://www.naer.edu.tw* 免費取用

本書經雙向匿名審查通過