教師手冊

素養導向高級中學數學教材

條件機率

國家教育研究院
十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

一、設計理念

本教材的主要架構有四個主題，分別為介紹列聯表、條件機率、獨立事件與貝氏定理。

主題一、列聯表：

引進列聯表（contingency table）的觀念，針對幾種不同的分類條件，將討論對象分成數個互斥的集合，在某些情況下對於不同集合之間的關係，比起文氏圖，列聯表提供學生更直觀的連結外，希望能以較簡單的方式幫助學生學習集合相關的概念。

主題二、條件機率：

在還沒正式介紹條件機率的定義之前，希望能以問題為導向，配合列聯表但不透過條件機率的符號表示法，讓學生直觀接觸條件機率的核心概念。協助學生看到條件機率是以條件（某一行或列）為討論對象，計算單元格佔所屬行（列）總和的比例。

主題三、獨立事件：

先說明獨立事件$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$的定義，推出$P(B\mid A)=P(B)$的概念，引導學生看到兩事件獨立時，列聯表每一行（列）的比例固定（不受條件變化影響）。

主題四、貝氏定理：

利用問題導向，接觸貝氏定理的核心概念。協助學生從列聯表中已知的縱向（橫向）比例關係推論出橫向（縱向）的比例關係。

學生在學習條件機率、獨立事件與貝氏定理時，透過列聯表中觀察數據，可以讓學生直觀地感受到這些定義主要精神。未來在學習統計方面，可深入對列聯表做卡方檢定等研究。除了活動、任務之外，編者在每個主題的最後設計了一些評量問題，四個主題總計有12個評量問題，希望學生可以回家練習並熟悉教材中的概念。

二、模組說明

模組名稱：不確定性（D-11B-2）。

教學年級：11年級B類。

教學節數：4節。

模組架構：列聯表、條件機率、獨立事件、貝氏定理。

教學目標：針對低數學需求的學生，把一些原本抽象的集合概念，透過列聯表的學習，將訊息完整呈現並協助組織其縱向或橫向的關聯性，並藉由列聯表加強學生對於條件機率、獨立事件、貝氏定理的觀念，希望能幫助學生對於這些定理實際上的操作與想法有更直觀的感覺。

學習重點：理解事件的不確定性，並能以機率將之量化。理解機率的性質並能操作其運算，能用以溝通和推論。

學生先備經驗：⑴能操作集合的運算，能以文氏圖作為輔助，並能用於溝通與推論。

⑵理解機率的性質，並能操作其運算，用於溝通與推論。

主題一　列聯表

活動1　列聯表的概念與製作　男女性選民對候選人的支持率有差異

民主的台灣，在每次的選舉前，候選人常做民意調查來分析選情。某次選舉，候選人大雄做民調，調查1000人，男女各500人，得到的結果是：支持的人數分別是男性300人、女性100人，支持共有400人，所以這次民調的支持率為40％。

要如何清晰的顯示「支持與否」與「性別」這兩個變數之間的關聯呢？

⑴請完成下列表格

性別 / 支持與否	男性	女性	合計
支持			
不支持			
合計			

⑵男性的支持率是多少？

⑶女性的支持率是多少？

解：

⑴

性別 / 支持與否	男性	女性	合計
支持	300	100	400
不支持	200	400	600
合計	500	500	1000

⑵由上表知男性的支持率是 $\frac{300}{500}=60\%$ (6成)。

⑶由上表知女性的支持率是 $\frac{100}{500}=20\%$ (2成)。

由此可發現男女性對候選人大雄的支持率相差40%，所以「支持與否」與「性別」應是有關聯。

這裡「支持與否」與「性別」都屬於**類別變數**，**類別變數**可能是性別、地區、教育程度、族群、宗教信仰、職業等。

要分析討論兩個類別變數之間的關聯，可以用像活動1的表格來呈現，這種表格我們稱為「**列聯表**」。

其中

⑴「支持與否」是列變數(row variable)，因為不同列分別代表「支持與否」。

⑵「性別」是行變數(column variable)，因為不同行分別代表不同的性別。

⑶表格中的數字都是和「支持與否」與「性別」有關的人數。

如何從「**列聯表**」中有效地獲取資訊呢？

⑴先檢視各單元格發生的次數。

⑵表格第3行「合計」欄的數字是每一列的總數，這些提供了支持與否的分布。

⑶表格第3列「合計」欄的數字是每一行的總數，這些提供了受訪民眾的性別分布。

這些類別變數的分布通常以百分比表示更清楚。

例如：活動1 中可以將性別分布表示成

$$\text{女性百分比 } \frac{500}{1000}=50\%\text{；男性百分比 } \frac{500}{1000}=50\%$$

任務1

假設某校財經系的申請入學甄選中，甄選結束後所公布資料如下：

(一) 男同學申請人數60人，通過人數21人。

(二) 女同學申請人數40人，通過人數16人。

⑴請利用上述資料完成「通過與否」與「性別」的列聯表。

通過與否＼性別	男同學	女同學	合計
通　過			
未通過			
合　計			

⑵在男同學中的通過率是多少？

⑶在女同學中的通過率是多少？

⑷在通過的同學中，女生佔的比例是多少？

【教師手冊任務解答】

⑴

通過與否＼性別	男同學	女同學	合計
通　過	21	16	37
未通過	39	24	63
合　計	60	40	100

⑵在男同學中的通過率為 $\frac{21}{60}\times 100\%=35\%$。

⑶在女同學中的通過率為 $\frac{16}{40}\times 100\%=40\%$。

⑷在通過的同學中，女生佔的比例是 $\frac{16}{37}\times 100\%=43\%$。

之前一些使用文氏圖協助處理的問題，也可以透過列聯表來完成，它的優點就是只需要運用加減法，將剩下的格子填完，再來就是從問題的敘述去列聯表中找答案。

活動2 複習文氏圖和練習使用列聯表

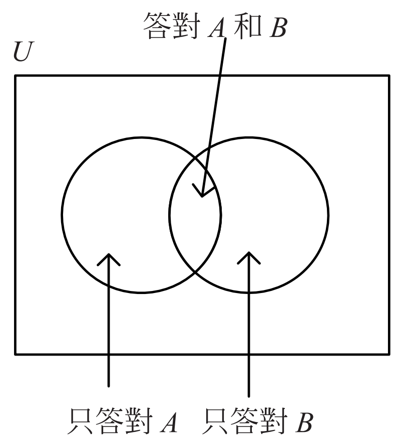
小庭的高一班上有 40 位同學，某次隨堂測驗考 A、B 兩題測驗題，

已知答對 A 題的有 28 人，答對 B 題的有 22 人，全對的有 15 人，

試求：(1)恰對一題的有多少人？ (2)兩題全錯的有多少人？

請同學練習使用兩種方法來求解：

1. 利用取捨原理和文氏圖求解。



2. 先建立列聯表再求解。

B題作答情況 / A題作答情況	答對 B 題	答錯 B 題	總和
答對 A 題	15※		28※
答錯 A 題			
總和	22※		40※

註：※的部份是已知的條件。

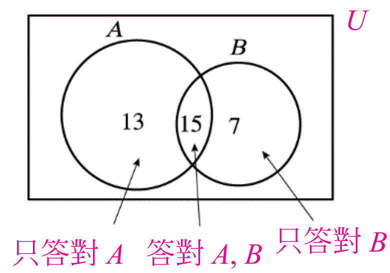
【教師手冊活動解答】

法一、利用取捨原理和文氏圖

令 A 是答對 A 題的同學所成的集合，$n(A)=28$

B 是答對 B 題的同學所成的集合，$n(B)=22$

依題意 $n(A\cap B)=15$，如圖所示：



①❶只答對 A 題人數＝答對 A 題人數－兩題全對人數

$=n(A)-n(A\cap B)=28-15=13$

❷只答對 B 題人數＝答對 B 題人數－兩題全對人數

$=n(B)-n(A\cap B)=22-15=7$

⟹恰對一題的有13＋7＝20（人）。

②由 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=28+22-15=35$（即至少對一題的人數）

$n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)=40-35=5$

⟹故兩題全錯的有5人。

法二、建立列聯表

A題作答情況 \ B題作答情況	答對 B 題	答錯 B 題	總和
答對 A 題	15※	13	28※
答錯 A 題	7	5	12
總和	22※	18	40※

讓學生感受，※的部份是已知的條件，列聯表的優點之一就是只需要運用加減法，將剩下的格子填完，再來就是從問題的敘述去列聯表中找答案。

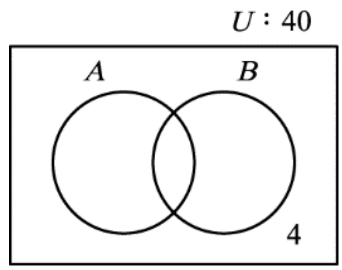
任務2 複習文氏圖和練習使用列聯表

小庭的高一班上有 40 位同學，某次參加英文與數學兩科的學藝競試，已知英文及格的有 30 人，數學及格的有 18 人，兩科都不及格的有 4 人，則兩科都及格的有多少人？

請同學練習使用兩種方法來求解：

令 A 表示英文及格的人所成的集合，B 表示數學及格的人所成的集合

1. 利用取捨原理和文氏圖求解。



2. 先建立列聯表再求解。

英文／數學	英文及格	英文不及格	總和
數學及格			※
數學不及格		※	
總和	※		※

【教師手冊任務解答】

法一、利用取捨原理和文氏圖

令 A 表示英文及格的人所成的集合，$n(A)=30$；

B 表示數學及格的人所成的集合，$n(B)=18$。

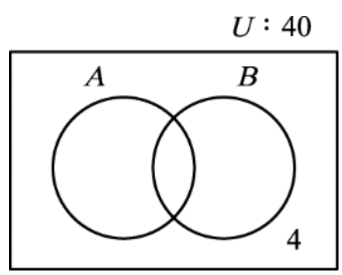
依題意 $n(A'\cap B')=4$；

如圖示：$n(A\cup B)=40-n(A'\cap B')=36$；

由 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow 36=30+18-n(A\cap B)$

$\Rightarrow n(A\cap B)=12$，故兩科都及格的有12人。



法二、建立列聯表

英文／數學	英文及格	英文不及格	總和
數學及格	12	6	18※
數學不及格	18	4※	22
總和	30※	10	40※

讓學生感受，※的部份是已知的條件，列聯表的優點之一就是只需要運用加減法，將剩下的格子填完，再來就是從問題的敘述去列聯表中找答案。

前一節我們已學過機率及其性質，並操作其運算，事實上，列聯表是另一種用於記錄機率問題中的計數或百分比的工具，它提供了一種計算機率的不同方法。接著的活動是將透過列聯表來確定機率的示例。

活動3 能運用列聯表回答一些機率的問題

小庭在新生體檢過後，老師請小庭幫忙整理一下班上40人位男、女同學有無戴眼鏡的人數。數據資料如下列 列聯表所示：

性別／眼鏡	男生	女生	總和
戴眼鏡	20	10	30
沒戴眼鏡	5	5	10
總和	25	15	40

首先必須了解表格所告訴我們的內容：

1.請回答下列問題：班上40人當中，

(1)男生總共有________人，而男生當中戴眼鏡的有________人。

(2)女生總共有________人，而女生當中沒戴眼鏡的有________人。

(3)全班沒戴眼鏡的總共有________人。

【教師手冊活動解答】

(1) 25，20。

(2) 15，5。

(3) 10。

在繼續前進之前，請確保你了解如何閱讀列聯表。

2.從建立的列聯表中，觀察單元格與所屬行列之間的關係，並回答下列的問題：

若從全班40人中任取一人，試求：

(1)該生為男生的機率。

(2)該生有戴眼鏡的機率。

(3)該生為男生且戴眼鏡學生的機率。

(4)該生為男生或戴眼鏡學生的機率。

【教師手冊活動解答】

⑴ P(男生)$=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$（男生佔所有人的比例）。

⑵ P(戴眼鏡)$=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$（戴眼鏡同學佔所以有人的比例）。

⑶ P(男生且戴眼鏡)$=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$。

⑷ P(男生或戴眼鏡)$=P$(男生)$+P$(戴眼鏡)$-P$(男生且戴眼鏡)$=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{5+6-4}{8}=\frac{7}{8}$。

任務3

根據活動3的列聯表中，觀察單元格與所屬行列之間的關係，並回答下列的問題：
從全班40人中任取一人，

⑴該生為女生的機率。

⑵該生沒有戴眼鏡的機率。

⑶該生為女生且沒有戴眼鏡學生的機率。

⑷該生為女生或沒有戴眼鏡學生的機率。

【教師手冊活動解答】

⑴ $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$。

⑵ $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$。

⑶ $\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$。

⑷ $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3+2-1}{8}=\frac{1}{2}$。

活動4 讓學生複習文氏圖和練習建立列聯表，並解決機率問題

將目前班上的學生分成男生和女生兩組，分別調查戴眼鏡與沒戴眼鏡的人數，並仿照活動3建立列聯表，並請男生回答活動3的問題，女生回答任務3的問題。

評量

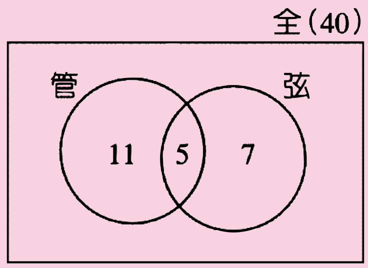
1. 某班 40 位同學中，會管樂者有 16 人，會弦樂者有 12 人，兩種樂器都會者有 5 人。請問全班同學中，

(1)兩種樂器至少會一種者有________人。

(2)兩種樂器都不會者有________人。

【教師手冊評量解答】

由圖可知。



(1)$11+5+7=23$（人）。

(2)$40-23=17$（人）。

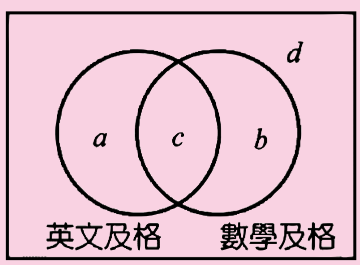
2. 某班 50 位同學中，第一次段考英文、數學至少有一科及格者有 45 人，英文、數學至少有一科不及格者有 30 人，試求：

(1)英文、數學皆不及格的人數。

(2)英文、數學恰有一科及格的人數。

【教師手冊評量解答】

由題意作文氏圖：



得 $a+b+c+d=50$，$a+b+c=45$，$a+b+d=30$，

$\Rightarrow d=5$，$a+b=25$，$c=20$。

(1)$d=5$，所以英文、數學皆不及格者有 5 人。

(2)$a+b=25$，所以英文、數學恰有一科及格者有 25 人。

3. 于庭的高一班上有 40 位同學，在某次同樂會中有薯條、雞塊和其他餐點，已知有吃薯條的有 30 人，有吃雞塊的有 20 人，兩個都沒吃的有 4 人，則兩個都有吃的有多少人？

【教師手冊評量解答】

雞塊＼薯條	有吃薯條	沒吃薯條	總和
有吃雞塊	14	6	20※
沒吃雞塊	16	4※	20
總和	30※	10	40※

所求為14人。

主題二　條件機率

活動5 練習對於條件機率的直觀感覺

在 活動3 中，小庭在新生體檢過後，老師請小庭幫忙整理一下班上40人位男、女同學有無戴眼鏡的人數。數據資料如下面列聯表所示

眼鏡＼性別	男生	女生	總和
戴眼鏡	20	10	30
沒戴眼鏡	5	5	10
總和	25	15	40

試問：

⑴若從全班40人中任取一人，則該生為戴眼鏡的男生之機率為何？

⑵若從男生當中任取一人，則該生有戴眼鏡的機率為何？

【教師手冊活動解答】

⑴ P(戴眼鏡的男生)$=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$（戴眼鏡的男生佔所有人的比例）。

⑵所求為戴眼鏡的男生佔男生的比例$=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$。

任務4 練習對於條件機率的直觀感覺

試問在 活動3 的班級當中，（參考 活動5 列聯表）

⑴若從男生當中任取一人，則該生沒戴眼鏡的機率為何？

⑵若從女生當中任取一人，則該生沒戴眼鏡的機率為何？

【教師手冊任務解答】

⑴所求為沒戴眼鏡的男生佔男生的比例$=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$。

⑵所求為沒戴眼鏡的女生佔女生的比例$=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$。

從活動5的問題中，戴眼鏡的男生之機率為 P（男生∩戴眼鏡）$=\frac{20}{40}$，而如果已知該學生是從25名男生中選出，則他是戴眼鏡的機率為 $\frac{20}{25}$，這個機率顯然與 $\frac{20}{40}$ 不同，這是因為它是以**不同的樣本空間**為計算基礎的；這個**縮減的樣本空間只有25名男生，非原來的**樣本空間有40位男、女學生。簡單的說就是求戴眼鏡的男生佔所有男生的比例。像這種「在已知被選的學生為男生的**條件**下，求他是戴眼鏡的**機率**」，我們稱之為**條件機率**。

我們把在事件 B 發生的條件下，事件 A 發生的機率，記為 $P(A|B)$，若 S 中每一個樣本點出現的機會均等，則由「$A\cap B$ 在事件 B 中所占的比例」可得：

$$P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

。而這最後一個式子通常做為條件機率的定義。

條件機率的定義

設 A、B 為樣本空間S中之二事件，且 $P(B)>0$，則在

『已知事件 B 發生的情況下，事件 A 發生的機率』稱為條件機率，以 $P(A\mid B)$ 表示，且定義 $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$。

以活動5的第二小題為例：「若從男生當中任取一人，則該生有戴眼鏡的機率」，可以表示成 P（戴眼鏡 | 男生）$=\frac{n(\text{戴眼鏡}\cap\text{男生})}{n(\text{男生})}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$，其中，樣本空間從原本全班40人，變成男生25人。所求為戴眼鏡的男生（兩事件的交集），佔所有男生（本問題的條件）的比值，即下表中，紅色框中的數據“20”與藍色框中的數據“25”之比值。

眼鏡＼性別	男生	女生	總和
戴眼鏡	20	10	30
沒戴眼鏡	5	5	10
總和	25	15	40

任務5 試由上表比較 P(戴眼鏡 | 男生)與 P(男生 | 戴眼鏡)有何相同與相異之處？

【教師手冊活動解答】

⑴ $P(\text{戴眼鏡} \mid \text{男生})=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$。

⑵ $P(\text{男生} \mid \text{戴眼鏡})=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$。

活動6 讓學生練習建立列聯表，並分辨條件機率的問題

在某次學校選舉學生會會長，有 A、B 兩位候選人，參加投票的學生共有1000人，其中男學生有600人，女學生有400人，已知 A 的得票數有500張，其中男生佔250張，B 的得票數有400張，其中女生佔100張，試問

⑴男生投的票當中為無效票的比例？

⑵女生投的票當中為無效票的比例？

⑶在所有無效票中任選一張，比較有可能是男生或女生投的？

【教師手冊活動解答】

得票情況＼性別	男生	女生	總和
A	250	250	500
B	300	100	400
無效票	50	50	100
總和	600	400	1000

⑴ $P(\text{無效票} \mid \text{男生})=\frac{50}{600}=\frac{1}{12}$。

⑵ $P(\text{無效票} \mid \text{女生})=\frac{50}{400}=\frac{1}{8}$。

⑶ $P(\text{男生} \mid \text{無效票})=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$。

$P(\text{女生} \mid \text{無效票})=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$。

若將樣本空間S分別依事件A、B分成互斥的兩類，其中 $A\cap A'=\phi$，$A\cup A'=S$，$B\cap B'=\phi$，$B\cup B'=S$則列聯表表格內容所對應的數量，如下所示：

	B	**B'**	**總和**
A	$n(A\cap B)$	$n(A\cap B')$	$n(A)$
A'	$n(A'\cap B)$	$n(A'\cap B')$	$n(A')$
總和	$n(B)$	$n(B')$	$n(S)$

以活動5 為例

性別 / 眼鏡	男生	女生	總和
戴眼鏡	20	10	30
沒戴眼鏡	5	5	10
總和	25	15	40

若 S 中每一個樣本點出現的機會均等，則列聯表表格內容所對應的機率，如下所示：

性別 / 眼鏡	男生	女生	總和
戴眼鏡	$\frac{20}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{30}{40}$
沒戴眼鏡	$\frac{5}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{10}{40}$
總和	$\frac{25}{40}$	$\frac{15}{40}$	1

以符號表示如下：

	B	**B'**	**總和**
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap B')$	$P(A)$
A'	$P(A'\cap B)$	$P(A'\cap B')$	$P(A')$
總和	$P(B)$	$P(B')$	$P(S)=1$

此時條件機率 $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$，即表中，紅色框中的數據“$P(A\cap B)$”與藍色框中的數據“$P(B)$”之比值。

任務6 經調查，小庭班上參加音樂性社團的有 20%，參加體育性社團的有 30%，兩種社團均參加的有 10%，試問：

⑴從音樂性社團中任選一人，則此人也有參加體育性社團的機率是多少？

⑵從體育性社團中任選一人，則此人也有參加音樂性社團的機率是多少？

【教師手冊任務解答】

若 A 表示某人參加音樂性社團的事件，B 表示某人參加體育性社團的事件，

依題意得 $P(A)=\frac{2}{10}$，$P(B)=\frac{3}{10}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{10}$，

⑴所求為 $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{10}}=\dfrac{1}{2}$。

⑵所求為 $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\dfrac{1}{3}$。

補充說明：

$P(A\mid B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$（表示 $A\cap B$ 佔 B 的比例）。

$P(B\mid A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$（表示 $A\cap B$ 佔 A 的比例）。

雖然分子相同都是 $n(A\cap B)$，但不同處是討論條件所構成的新樣本空間，所以分母不同。

一般而言，在條件機率中，A 與 B 的關係並不對稱，即 $P(A\mid B)\neq P(B\mid A)$。

任務7

設 A、B 是樣本空間 S 中的兩個事件，A 發生之機率為 $P(A)$，若 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{2}{3}$，$P(A\cap B)=\frac{3}{8}$，則 $P(A'\mid B)=$________ 。

【教師手冊任務解答】

$P(A'\mid B)=\dfrac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{7}{16}$。

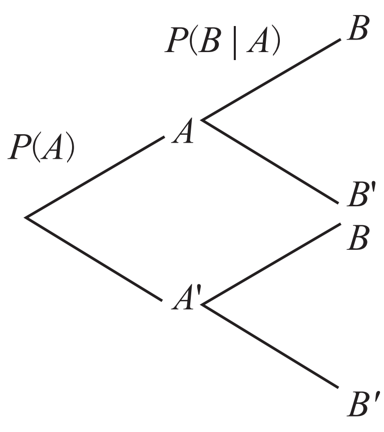
條件機率的乘法法則

在活動5中，我們可以看到男生佔所有人的比例為 $\frac{5}{8}$ ，而男生中有戴眼鏡的佔所有男生的比例為 $\frac{4}{5}$，所以可知戴眼鏡的男生佔所有人的比例為$\frac{4}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{1}{2}$，這背後隱含甚麼概念呢？我們可以從條件機率的定義 $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$，$P(B)>0$ 得到 $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A\mid B)$。

即 A 和 B 兩事件同時發生的機率，等於 B 發生的機率乘上在 B 發生的條件下 A 發生的機率，這個等式稱為**條件機率**的乘法法則。此法則以樹形圖來表示十分地直觀，如下圖：

- 男生 $\frac{5}{8}$
  - 戴眼鏡 $\frac{5}{8}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{2}$
  - 沒戴眼鏡 $\frac{5}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{8}$
- 女生 $\frac{3}{8}$
  - 戴眼鏡 $\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$
  - 沒戴眼鏡 $\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$

以符號表示如下：



$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)$

又從 $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$，$P(A)>0$，我們可以得到**條件機率的**乘法法則**的另一個形式** $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)$。

綜合上述討論，我們有：

條件機率的乘法法則

設A、B為樣本空間S中的二事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$ ，則

(1) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)$。

(2) $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A\mid B)$。

活動7 練習條件機率的乘法法則

袋中有 6 顆黑球、3 顆白球，若每球被選取的機會均等，今從袋中取球，每次取 1 球，取後不放回，連取兩次，令 A 表示第一次取到白球的事件，B 表示第二次取到白球的事件，求下列的機率，並以文字解釋其意義。

(1) $P(A)$。

(2) $P(B \mid A)$。

(3) $P(A \cap B)$。

【教師手冊活動解答】

令 A 表示第一次取到白球的事件，B 表示第二次取到白球的事件，則：

(1) $P(A)$表示第一次取到白球的機率，所以 $P(A)=\dfrac{3}{6+3}=\dfrac{1}{3}$。

(2) $P(B|A)$表示在第一次取到白球的情況下，第二次取到白球的機率，
所以 $P(B \mid A)=\dfrac{2}{6+2}=\dfrac{1}{4}$。

(3) $P(A \cap B)$表示第一次與第二次兩次都取到白球的機率，由條件機率的乘法法則，
得 $P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B \mid A)=\dfrac{3}{9}\times\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{12}$。

任務8 練習條件機率的乘法法則

已知籤筒的10支籤中有獎的籤有3支，若甲、乙兩人先後各抽1支。

設A表甲中獎的事件，B表乙中獎的事件。

求下列的機率，並以文字解釋其意義。

(1) $P(A)$。

(2) $P(B \mid A)$。

(3) $P(A \cap B)$。

【教師手冊任務解答】

(1) $P(A)$表示甲中獎的機率，因為甲第一個抽籤，所以 $P(A)=\dfrac{3}{10}$。

(2) $P(B \mid A)$表示在甲中獎的情形下，乙中獎的機率。
因為甲抽走一支有獎籤後，籤筒中剩 9 支籤，其中 2 支有獎，所以此時乙中獎的機率 $P(B \mid A)=\dfrac{2}{9}$。

(3) $P(A \cap B)$表示兩人都中獎的機率，由條件機率的乘法法則，得
$P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B \mid A)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}$。

三事件的乘法法則

一般條件機率的乘法法則，可推廣至兩個以上的事件，底下我們將它推廣到三個事件：若 $P(A\cap B)\neq 0$，則 $P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)\cap C\,)$

$$=P(A\cap B)\cdot P(C\mid A\cap B)$$

$$=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid A\cap B)$$

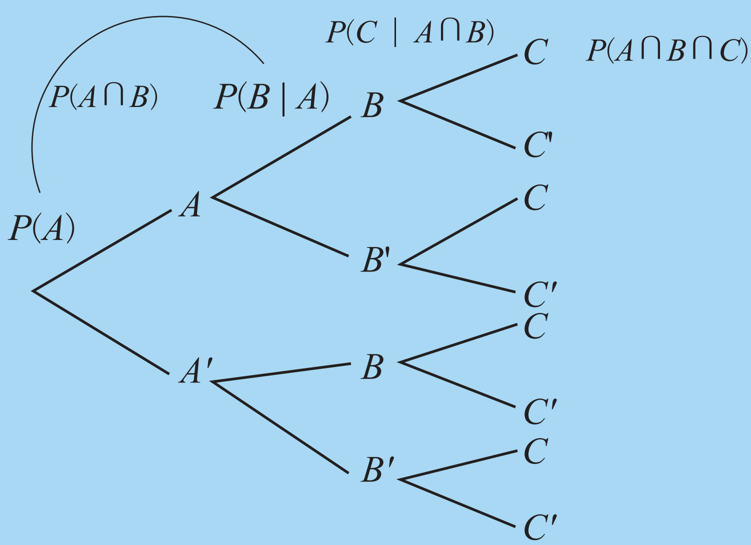
因此，我們有：

條件機率的乘法法則

設 A、B、C 是樣本空間 S 中的三事件。

若 $P(A\cap B)>0$，則

$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid A\cap B)$。



活動8 三事件的乘法法則

袋中有 5 顆黑球、3 顆白球，若每球被選取的機會均等，今從袋中取球，每次取 1 球，取後不放回，連取三次。

設 A 表第一次取出白球的事件，

B 表第二次取出白球的事件，

C 表第三次取出黑球的事件。

求下列的機率，並以文字解釋其意義。

(1) $P(A)$。

(2) $P(B\mid A)$。

(3) $P(C\mid A\cap B)$。

(4) $P(A\cap B\cap C)$。

【教師手冊活動解答】

(1) $P(A)$表示第一次取出白球的機率，所以 $P(A)=\frac{3}{8}$。

(2) $P(B\mid A)$表示在第一次取出白球的情形下，第二次取出白球的機率，所以 $P(B\mid A)=\frac{2}{7}$。

(3) $P(C\mid A\cap B)$表示在第一、二次都取出白球的情形下，第三次取出黑球的機率，所以 $P(C\mid A\cap B)=\frac{5}{6}$。

(4) $P(A\cap B\cap C)$表示依序取出白球、白球、黑球的機率，由條件機率的乘法法則，得

$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid A\cap B)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$。

任務 9

袋中有 4 顆紅球、2 顆黃球、2 顆白球，若每球被選取的機會均等，今從袋中取球，每次取 1 球，取後不放回，連取三次，

令 A 表示第一次取到紅球的事件，B 表示第二次取到白球的事件，C 表示第三次取到黃球的事件。

求下列的機率，並以文字解釋其意義。

(1) $P(A)$。

(2) $P(B \mid A)$。

(3) $P(C \mid A \cap B)$。

(4) $P(A \cap B \cap C)$。

【教師手冊任務解答】

令 A 表示第一次取到紅球的事件，B 表示第二次取到白球的事件，C 表示第三次取到黃球的事件。

(1) $P(A)$表示第一次取到紅球的機率，所以 $P(A)=\frac{4}{8}$。

(2) $P(B \mid A)$表示在第一次取出紅球的情形下，第二次取出白球的機率，所以 $P(B \mid A)=\frac{2}{7}$。

(3) $P(C \mid A \cap B)$表示在第一次取出紅球且第二次取出白球的情形下，第三次取出黃球的機率，所以 $P(C \mid A \cap B)=\frac{2}{6}$。

(4) $P(A \cap B \cap C)$表示依序取得紅球、白球、黃球的機率，由條件機率的乘法法則

$P(A \cap B \cap C)=P(A)\cdot P(B \mid A)\cdot P(C \mid A \cap B)=\frac{4}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{21}$。

評量

1. 下表為某一年度獲頒學位數及性別的雙向表（單位：千人），試求：

性別＼學位	學士	碩士	博士
男性	590	171	24
女性	610	189	16

⑴學士學位中，女性所占的百分比為何？

⑵所有的學位中，博士學位所占的百分比為何？

⑶所有的博士學位中，有多少百分比是由女性獲得？

⑷女性所獲得的學位中，博士學位占多少的百分比？

【教師手冊評量解答】

⑴學士學位中，女性所占的百分比為 $\dfrac{610}{610+590}=\dfrac{610}{1200}\fallingdotseq 50.8\%$。

⑵學士學位有1200（千人）；碩士學位有360（千人）；博士學位有40（千人），

所有的學位中，博士學位所占的百分比為 $\dfrac{40}{1200+360+40}=\dfrac{40}{1600}=2.5\%$。

⑶所有的博士學位中，女性占的百分比為 $\dfrac{16}{40}=40\%$。

⑷女性所獲得的學位總數為 610+189+16=815（千人），

其中，博士學位占 $\dfrac{16}{815}\fallingdotseq 1.96\%$。

2. 某鄉鎮 50 歲以上的民眾患有青光眼疾病的機率為 12%，患有牙周病的機率為 10%，兩者都有的機率為 4%，則：

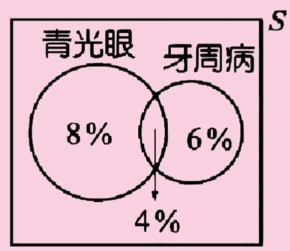
⑴從患有牙周病的人選出一人，而此人也恰有青光眼疾病的條件機率為____。

⑵從患有青光眼疾病的人選出一人，而此人也恰有牙周病的條件機率為____。

【教師手冊評量解答】

⑴ P(青光眼｜牙周病)$=\dfrac{0.04}{0.1}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$。

⑵ P(牙周病｜青光眼)$=\dfrac{0.04}{0.12}=\dfrac{1}{3}$。

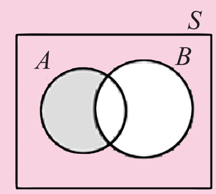


3. 設 A，B 是樣本空間 S 中的兩個事件，A 發生之機率為 $P(A)$，

若 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{2}{3}$，$P(A\cap B)=\dfrac{3}{8}$，則 $P(A\mid B')=$________ 。

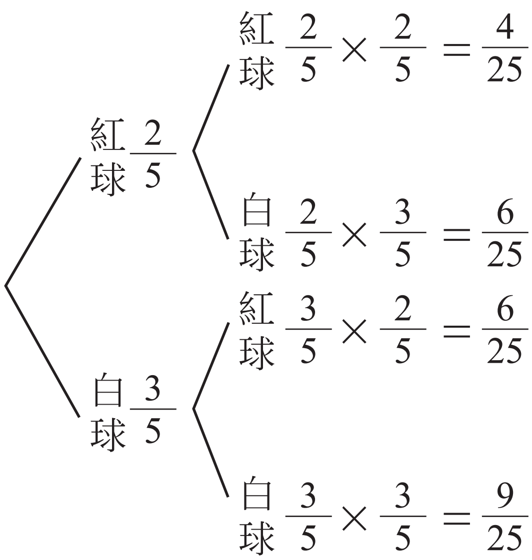
【教師手冊評量解答】

$P(A\mid B')=\dfrac{P(A\cap B')}{P(B')}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{8}}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{8}$。



主題三　獨立事件

假設袋子裡有五個大小一樣的球，其中兩個是紅球，三個是白球，郝強老師要求小庭一次取一球，取完放回，共取兩次，則第一次取到紅球且第二次取到白球的機率可由下列的樹狀圖清楚看到 P(第一次紅球∩第二次白球)=P(第一次紅球)×P(第二次白球)＝ $\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$



兩事件獨立的定義

設A、B為樣本空間S中的任兩事件，

當 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$時，稱 A 與 B 為**獨立事件**。

活動9 戴眼鏡與性別獨立

小庭隔壁班的人數也有 50 人，男生共有 40 人，已知在男生當中，戴眼鏡的有 24 人；女生 10 人中，戴眼鏡的有 6 人，現在從全班 50 人中任取一人，

令 B、G 分別表男生與女生的事件，A表戴眼鏡的事件，A' 表沒戴眼鏡的事件，

(1)試將上述資料以列聯表表示。

(2)求 $P(A\mid B)$、$P(A\mid G)$、$P(A)$。

(3)試判斷「戴眼鏡」和「性別」是否獨立？說說你的看法。

解：

(1)上述資料可整理成如下的列聯表：

眼鏡＼性別	男生（B）	女生（G）	總和
戴眼鏡（A）	24	6	30
沒戴眼鏡（A'）	16	4	20
總和	40	10	50

(2) $P(A\mid B)$表示已知此人為男生，則此人戴眼鏡的機率，得 $P(A\mid B)=\dfrac{24}{40}=60\%$；

$P(A\mid G)$表示已知此人為女生，則此人戴眼鏡的機率，得 $P(A\mid G)=\dfrac{6}{10}=60\%$；

$P(A)$表示此人戴眼鏡的機率，得 $P(A\mid G)=\dfrac{30}{50}=60\%$，三者相同。

(3)從上述的資料我們可以發現 $P(A\cap B)=\dfrac{24}{50}=\dfrac{30}{50}\times\dfrac{40}{50}=P(A)\times P(B)$，由定義可知，兩事件為獨立，並可推得 $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)\times P(B)}{P(B)}=P(A)$，這就是說，「事件 A 發生的機率不受事件B發生的影響」。因此在第(2)小題中可以觀察到，男生中戴眼鏡的機率、女生中戴眼鏡的機率與全班戴眼鏡的機率都是60%，另外，進一步可觀察到，當兩事件獨立時，列聯表每一行比例固定為3：2：5，表示同一性別中，戴眼鏡和不戴眼鏡的比例相同；每一列比例固定為4：1：5，表示無論是戴眼鏡或不戴眼鏡的同學中，性別比例都相同。

任務10 利用獨立事件的列聯表中各行(列)的數據成比例

某校數學教師針對高三學生隨機選出 30 名男學生及 20 名女學生，做新教材適應性的調查，每一位學生都要填答，且只能填答適應或不適應。結果有 35 名學生填答無法適應新教材內容。假設學生性別與適應狀況獨立，請完成下列表格，使其最能符合上述假設。

適應狀況＼性別	適應	不適應（35人）
男生（30人）	________人	________人
女生（20人）	________人	________人

【教師手冊任務解答】

適應的人數為30＋20－35=15，因為獨立，所以列聯表的每一行（列）比例會固定，

所以每一行的比例應該都和原本男女生的比例相同，維持3：2的比例，故可輕易得到下列的數據：

適應狀況＼性別	適應（15人）	不適應（35人）
男生（30人）	9 人	21 人
女生（20人）	6 人	14 人

活動10 獨立事件的重要性質

【104年數乙】

擲一個公正骰子兩次。事件A表示第一次擲出2點，事件B表示第二次擲出3點，試求：

(1) $P(A\cap B)$。

(2) $P(A\cap B')$。

(3) $P(A'\cap B')$。

解：

(1) $P(A)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，$P(A\cap B)=\frac{1\times1}{6\times6}=\frac{1}{36}=P(A)\times P(B)$。

(2) $P(A)=\frac{1}{6}$，$P(B')=\frac{5}{6}$，$P(A\cap B')=\frac{1\times5}{6\times6}=\frac{5}{36}=P(A)\times P(B')$。

(3) $P(A')=\frac{5}{6}$，$P(B')=\frac{5}{6}$，$P(A'\cap B')=\frac{5\times5}{6\times6}=\frac{25}{36}=P(A')\times P(B')$。

事實上，兩事件獨立時，會有如下的性質：

重要性質

設 A、B 為獨立事件，則 A 與 B'、A' 與 B、A' 與 B' 亦均為獨立事件。

任務11

靜雯、詠絜遇到不會的題目都用猜的。已知靜雯猜對的機率為$\frac{2}{3}$，詠絜猜對的機率為$\frac{1}{2}$，且兩人的猜題是獨立事件。今兩人同猜一題，試求：

(1)兩人都猜對的機率。

(2)兩人都沒猜對的機率。

(3)至少有一人猜對的機率。

【教師手冊任務參考解答】

若 A 表示靜雯猜對的事件，B 表示詠絜猜對的事件，

依題意有 $P(A)=\frac{2}{3}$、$P(B)=\frac{1}{2}$，

(1)因為 A、B 為獨立事件，所以兩人均猜對的機率為

$P(A\cap B)=P(A)\,P(\mathrm{B})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$。

(2)因為 A、B 為獨立事件，所以 A'、B' 也是獨立事件，即兩人都沒猜對的機率為

$P(A'\cap \mathrm{B}')=P(A')\,P(\mathrm{B}')=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$。

(3)至少有一人猜對，即求 $P(A\cup \mathrm{B})$。由機率取捨原理可得：

$$P(A\cup \mathrm{B})=P(A)+P(\mathrm{B})-P(A\cap \mathrm{B})$$

$$=P(A)+P(\mathrm{B})-P(A)P(\mathrm{B})=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}。$$

評量

1. 某藥品測試欲徵求試用者50人，其性別與國籍的列聯表如下：

性別＼國籍	本國籍	外國籍
男性	16	$28-x$
女性	x	6

欲使性別與國籍獨立，則 $x=$________。

【教師手冊評量參考解答】

$\because$性別與國籍獨立，$\therefore \frac{16}{x}=\frac{28-x}{6}$，

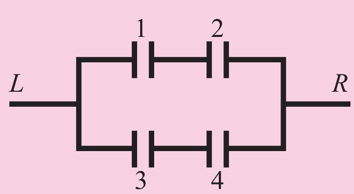
$\Rightarrow x^2-28x+96=0$，即 $x=4$ 或 24。

2. 假設<u>玨儒</u>每四題中能答出一題，<u>若帆</u>每三題中能答出兩題。
今<u>玨儒</u>、<u>若帆</u>兩人同解一題，此題能解出之機率為何？（兩人解題互不影響）

【教師手冊評量參考解答】

$p=1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$。

3. 如圖中，電路有 4 個開關，以 1、2、3、4 表示，流通過各開關之機率皆為 $\frac{1}{2}$，且各開關之操作獨立，試求電流從左端 L 流到右端 R 的機率？



【教師手冊評量參考解答】

p(1，2 通)$+p$(3，4 通)$-p$(1，2，3，4 通)

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}$

$=\frac{7}{16}$。

主題四 貝氏定理

我們將利用下面的活動來說明貝氏定理，以便了解它的意義。

活動11 貝氏定理

經由健康中心統計，小庭的學校，高一有200位學生，高二有195位，高三有205位，其中戴眼鏡的同學佔各年級人數的比例分別為高一 $\frac{7}{10}$、高二 $\frac{3}{5}$、高三 $\frac{3}{5}$，試問：

(1)試將上述資料以列聯表表示。

(2)若從全校所有同學中隨意抽一人，則該生為高一學生的機率？

(3)若從全校所有同學中隨意抽一人，則該生有戴眼鏡的機率？

(4)若已知抽到的學生有戴眼鏡，則該生為高一學生的機率？

【教師手冊活動解答】

令 A_1、A_2、A_3 分別代表選中高一、高二、高三學生的事件，B 代表抽到有戴眼鏡學生的事件，

(1)先製作相關的列聯表

	高一	高二	高三	總和
戴眼鏡	140	117	123	380
沒戴眼鏡	60	78	82	220
總和	200	195	205	600

(2) $P(\text{高一})=P(A_1)=\dfrac{200}{200+195+205}=\dfrac{200}{600}=\dfrac{1}{3}$。

(3) $P(\text{戴眼鏡})=P(B)=\dfrac{200\times\frac{7}{10}+195\times\frac{3}{5}+205\times\frac{3}{5}}{200+195+205}=\dfrac{140+117+123}{600}=\dfrac{380}{600}=\dfrac{19}{30}$。

(2) $P(\text{高一}\mid\text{戴眼鏡})=P(A_1\mid B)=\dfrac{200\times\frac{7}{10}}{200\times\frac{7}{10}+195\times\frac{3}{5}+205\times\frac{3}{5}}=\dfrac{140}{140+117+123}=\dfrac{140}{380}=\dfrac{7}{19}$。

活動11 中，令 A_1、A_2、A_3 分別代表高一、高二、高三學生，A_1、A_2、A_3 為兩兩互斥，因為不可能同時選中兩個年級，且三個年級中必有一個被選中，所以 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup = S$，$S$ 代表樣本空間。像這種情況下我們稱 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 為樣本空間 S 的一組分割，它們將 S 分割成三塊。

一般而言，樣本空間S的分割定義如下：

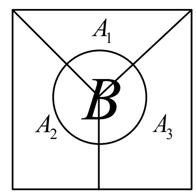
樣本空間S的分割

若 A_1、A_2、⋯、A_n 為樣本空間S中的 $\boldsymbol{n}$ 個事件，且滿足下列二條件：

(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_2 = S$，

(2) $A_i \cap A_j = \varnothing$（互斥），其中 $i \neq j$（$i, j = 1, 2, \cdots, n$），

則稱 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 為樣本空間S的一組分割。



以下就3事件的分割做說明。

若三個非空事件 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 為樣本空間S的一組分割，B 為 S 中的另一個事件，

則 B 會被分割成3個互斥的事件：$A_1 \cap B$、$A_2 \cap B$、$A_3 \cap B$，因此，事件 B 發生的機率就是這些互斥事件的機率和，即 $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$。

又在事件 B 發生的情況下 $(P(B) > 0)$，事件 A_k 發生的機率為

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

再配合條件機率的乘法法則：$P(A_k \cap B) = P(A_k) \cdot P(B \mid A_k)$，$k = 1, 2, 3$，

我們可以將（*）式改寫，得下列的定理：

貝氏定理

設 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 為樣本空間 S 的一組分割且 $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, 3$

若 B 為樣本空間 S 中的事件，且 $P(B) > 0$，則

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) \cdot P(B \mid A_k)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)},\ k = 1, 2, 3。$$

上面的式子是貝氏定理的一個簡單情形，貝氏定理是在1763年英國牧師貝氏（Thomas Bayes，1702～1761）的遺作中發現的，流傳至今已被廣泛的應用。

如下表所示，從列聯表來呈現貝氏定理的公式，更是簡明清楚，

例如：$P(A_1 \mid B)=\dfrac{P(A_1\cap B)}{P(B)}$ 就是『**紅色框中的數據“$P(A_1\cap B)=P(A_1)\cdot P(B\mid A_1)$”與藍色框中的數據“$P(B)$”之比值。**』

而其中 $P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+P(A_3\cap B)$的成立也很顯然，再利用條件機率的乘法法則，得 $P(B)=P(A_1)\cdot P(B\mid A_1)+P(A_2)\cdot P(B\mid A_2)+P(A_3)\cdot P(B\mid A_3)$。

	B	B'	總和
A_1	$\boxed{P(A_1\cap B)=P(A_1)\cdot P(B\mid A_1)}$	$P(A_1\cap B')$	$P(A_1)$
A_2	$P(A_2\cap B)=P(A_2)\cdot P(B\mid A_2)$	$P(A_2\cap B')$	$P(A_2)$
A_3	$P(A_3\cap B)=P(A_3)\cdot P(B\mid A_3)$	$P(A_3\cap B')$	$P(A_3)$
總和	$\boxed{P(B)}$	$P(B')$	$P(S)=1$

任務12

小庭畢業之後到一家專門生產LED燈泡的公司上班，並擔任品管人員的工作，她發現公司有甲、乙、丙3條生產線，甲生產線每天生產3000個LED燈泡，乙生產線每天生產4000個LED燈泡，丙生產線每天生產3000個LED燈泡，

若甲、乙、丙生產線所生產的LED燈泡中，不良品的比例分別為2%，3% ，5% ，今任選一燈泡，則：

(1)試將上述資料以列聯表表示。

(2)求選出的LED燈泡為不良品的機率。

(3)將所有產品混合，若檢驗發現有一個不良品，則求此燈泡是由丙生產線生產的機率。

【教師手冊任務解答】

(1)

	甲	乙	丙	總和
不良品	60	120	150	330
良品	2940	3880	2850	9670
總和	3000	4000	3000	10000

(2) $P(\text{不良品})=\dfrac{3000\times 2\%+4000\times 3\%+3000\times 5\%}{3000+4000+3000}=\dfrac{330}{10000}=3.3\%$。

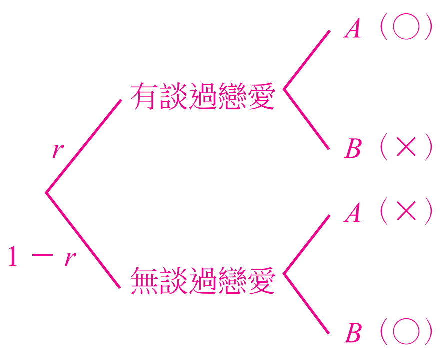
(3) $P(\text{來自丙}\mid\text{不良品})=\dfrac{150}{60+120+150}=\dfrac{150}{330}=\dfrac{5}{11}$。

活動12 應用問題

研究者若善用統計技巧，將可降低受訪者心防，使調查結果更加可靠，郝強老師想了解班上 40 名同學中，約有多少比率在國中前即談過戀愛，於是他設計了 A、B 兩份問卷，其中 A 卷 30 張，B 卷 10 張，及不記名答案卷 40 張，隨機發給班上同學（同學不是拿到 A 卷就是 B 卷，至於 A、B 卷皆不回收，答案卷要回收），其中 A 卷的問題是『我曾經在國中以前談過戀愛』，因此拿到 A 卷的同學若在國中前曾談過戀愛，就要在答案卷上畫『○』，若不曾談過戀愛就在答案卷上畫『╳』；反之，B 卷的問題是『我不曾在國中以前談過戀愛』，因此拿到 B 卷的同學若國中前不曾談過戀愛，則畫『○』，曾談過戀愛，就要在答案卷上畫『╳』。如此設計，不論某位學生回答的結果是○或╳，老師都無法得知該生在國中前是否談過戀愛，但可大致了解全班的狀況。答案卷經過回收後，老師發現 40 張答案卷中有14 張畫『○』，26 張畫『╳』，則在本班同學中，約有多少比率的同學曾在國中以前談過戀愛？

【教師手冊活動解答】

設 r 為本班同學中有談過戀愛的比率，



$$A(○)+B(○)=\frac{3}{4}r+\frac{1}{4}(1-r)=\frac{14}{40}=\frac{7}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{2r+1}{4}=\frac{7}{20}\Rightarrow r=\frac{1}{5}。$$

任務13

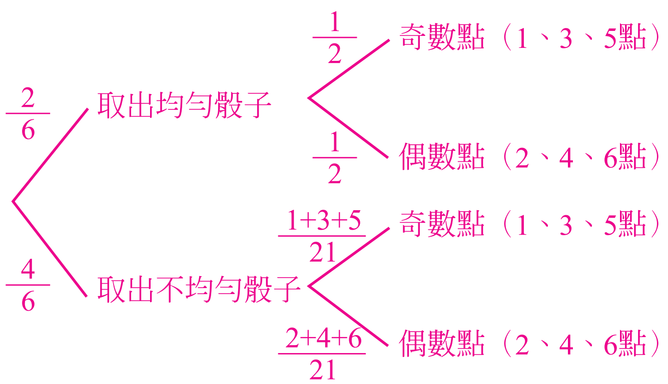
小庭在某天下班之後和朋友玩擲骰子遊戲，若袋子裡有 6 顆外型、重量完全相同的骰子，其中 2 顆是均勻的，出現各面的機率均等，另外 4 顆是不均勻的，出現各面的機率與其點數成正比。今隨機自袋中取出一顆骰子拋擲，在出現偶數點的條件下，試求所拋擲的是不均勻骰子的機率為 ________（請化為最簡分數）

【教師手冊任務解答】

均勻骰子每面出現的機率均為 $\frac{1}{6}$；

不均勻骰子各面機率比為1：2：3：4：5：6，

故1點、2點、3點、4點、5點、6點的機率依序為 $\frac{1}{21}$、$\frac{2}{21}$、$\frac{3}{21}$、$\frac{4}{21}$、$\frac{5}{21}$、$\frac{6}{21}$。



配合列聯表分析

	均勻	不均勻	總和
偶數	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{21}$	$\frac{1}{6}+\frac{8}{21}=\frac{23}{42}$
奇數	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{21}$	$\frac{1}{6}+\frac{6}{21}=\frac{19}{42}$
總和	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

所以 $P(\text{不均勻骰子}\mid\text{偶數})=\dfrac{\frac{8}{21}}{\frac{1}{6}+\frac{8}{21}}=\dfrac{\frac{16}{42}}{\frac{23}{42}}=\dfrac{16}{23}$。

評量

1. 一種疫苗對預防某種疾病有效的比例是90%，如果未注射疫苗的人會感染此疾病的機率是40%，而已知在某地區有25%的居民注射疫苗，

(1)試將上述資料以列聯表表示。

(2)在此地區隨機選一人，他（或她）會感染此疾病的機率為__________。

(3)若此地區有1萬人，請問感染此疾病的有__________人。

【教師手冊評量解答】

(1)

	有注射疫苗	沒注射疫苗	總和
感染疾病	0.25×0.1	0.75×0.4	0.325
未感染疾病	0.25×0.9	0.75×0.6	0.675
總和	0.25	0.75	1

(2) $0.25\times0.1+0.75\times0.4=0.025+0.3=0.325$。

(3) $10000\times0.325=3250$。

2. 某校高二自然組同學中有 $\frac{1}{5}$ 血型為A型，社會組同學中有 $\frac{1}{3}$ 血型為A型，今由自然組同學中任選25人，社會組同學中任選15人，

(1)試將上述資料以列聯表表示。

(2)就此40人中任選1人，若其血型為A型，則此同學為自然組同學之機率為__________。

[教師手冊評量解答]

(1)

	自然組	社會組	總和
A型	5	5	10
不是A型	20	10	30
總和	25	15	40

(2) $P(\text{自然組} \mid A\text{型})=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$。

3. 某燈泡公司有北、中、南三廠，產量比例為30%、30%、40%，各廠產品不合格率為1.5%，1.2%，1%。

(1)試將上述資料以列聯表表示。

(2)在某次總抽查中，任抽查一個產品，檢驗為不合格，此燈泡為北廠出品的機率為＿＿＿＿＿。

【教師手冊評量解答】

(1)

	北廠	中廠	南廠	總和
不合格	0.3×0.015	0.3×0.012	0.4×0.01	0.0121
合格	0.3×0.985	0.3×0.988	0.4×0.09	0.9879
總和	0.3	0.3	0.4	1

(2) $P(\text{北廠}\mid\text{不合格})=\dfrac{0.0045}{0.0121}=\dfrac{45}{121}$。

素養導向數學教材 / 單維彰 主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院， 2019.12

1. 數學教育
2. 中學數學
3. 教材與教法

發 行 人：郭工賓
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組
召 集 人：單維彰
副召集人：林碧珍、鄭章華（依姓氏筆劃順序排列）
編輯小組：施羿如、晏向田、許曉芸、陳宗賢、陳彥霖、陳維民、陸昱任、曾明德、曾俊雄、歐志昌、鄧家駿、簡秀純（依姓氏筆劃順序排列）
作　　者：陳宗賢、曾俊雄（依姓氏筆劃順序排列）
執行編輯：江增成、張淑娟、梁雅婷、蔡敏冲、盧培春（依姓氏筆劃順序排列）
出版年月：108 年 12 月
版　　次：初版
電子全文可至國家教育研究院網站 *http://www.naer.edu.tw* 免費取用

本書經雙向匿名審查通過