平面上的線性變換與二階方陣

教師手冊

教材設計理念

1 教材架構

設計動機

「平面上的線性變換」是 99 課綱高二下 A 版（◎部分）的內容，線性變換有廣泛的用途，在數學、統計、金融、電腦影像處理中都是常用的工具，在高中放入此單元，作為大學理工科系「線性代數」課程的準備。一般學生學習時，常流於表面的記憶背誦與矩陣乘法計算，沒有體會到「變換矩陣」本身的意義，編者因此設計此課程，希望能讓學生透過一連串有意義的學習活動，理解並內化教材中的概念，俾使未來學生即便忘記這些基本變換矩陣的內容，也能自行輕易推導出來。

2 教材設計想法

⑴以探索式活動引導學生將操作矩陣乘法的動作與圖形變換連結，待熟練之後，經由活動，猜測可能的變換，在過程中認識到線性變換的性質，漸進的建立概念的發展。

⑵線性變換既是幾何上的變換，幾何圖形與代數式的連結為教學上的重點，教學活動中的每一個概念建立時，都要將代數式在幾何上的意涵以圖形和文字說明清楚表達。

⑶活動以學生現有知識架構來規劃，在活動三中製造一個認知衝突，強化這個基本概念；在練習 6 中，也讓學生提出自己的想法，發展一題多解、綜合概念應用的能力。也在各個活動適當時機鋪陳未來要發展的概念如練習 5，為介紹新概念奠基。推移變換是學生比較不易產生直觀的變換，所以在課程中定義時,要將推移的方向，及推移根據哪一個坐標的倍數，如何移動，三者皆介紹清楚，才展開後面的活動。

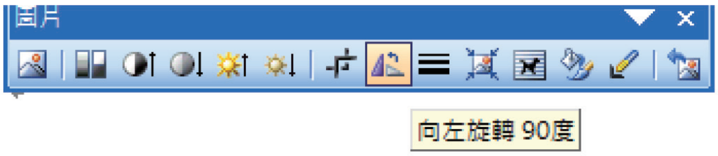
本課程設計在於建立學生線性代數中由基底變換到基底的概念，期許建立概念後，將來進一步學習線性代數時，能以此為概念擴展。

前言

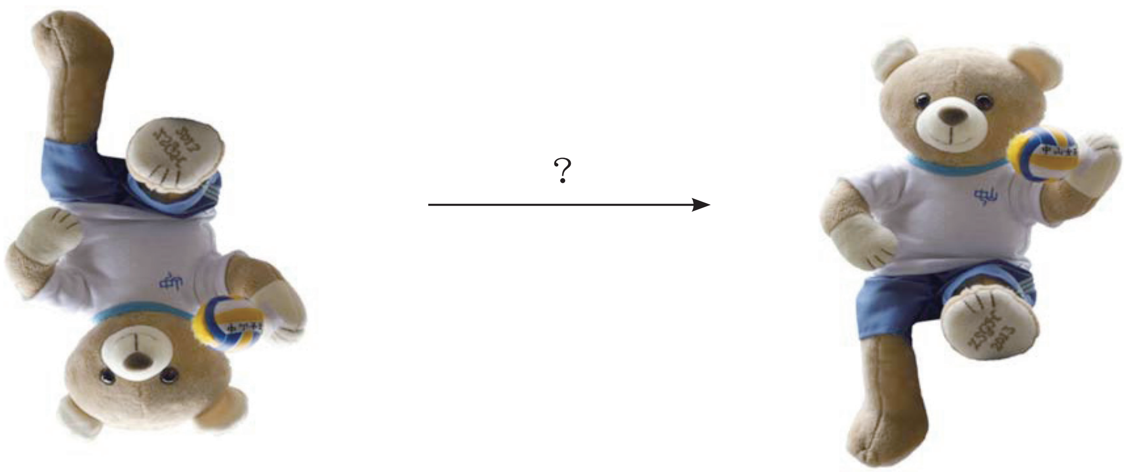
購買電視或數位相機時，最常提到「畫素」(*pixel* 亦稱為「像素」、「像點」)，此名詞的意思是這個裝置會把取得的影像，以格狀來儲存，每一格為一個畫素，影像的長與寬被切成許多格，那麼每一個影像便是一個矩陣，矩陣中的每一個元素就是每一格子儲存的資料。因此，畫素愈高矩陣愈大，影像呈現得更清楚，不過代價便是影像所使用的記憶空間增大，處理時所需的時間也會增加。

在處理影像的時候，這個矩陣的每一個元素儲存了這一個格子影像的顏色與透明度。當顯示靜態畫面時，只要在矩陣上打上各位置所對應的顏色數值，即可呈現所需圖案；但若要展現動態畫面時，便須逐次變換圖案的位置、角度與大小，這就牽涉到平面變換的概念，基本的平面變換有平移、旋轉、伸縮、鏡射與推移，如何使用矩陣的運算，來使影像旋轉、平移、縮放、鏡射 … 等，此處因平移概念較為簡單，所以我們介紹其餘四種變換。

如下圖，當我們收到了這一張照片，你是不是會使用工具列來將圖修正呢？



這背後的數學原理為何呢？讓我們來展開這段數學學習之旅囉！



教學補充・搭配學生手冊 P2

[教學活動安排]

希望能以學生慣用的工具引入，如照片編修、圖片整理這些生活經驗引入，體會使用電腦軟體與數學之間的關係。

壹　平面上的線性變換（linear transformation）

1 變換矩陣

在之前的單元，我們學習了矩陣的乘法，現在我們要專門來討論二階方陣的一個特別作用。

活動 1

請利用矩陣乘法性質計算下列各值：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$　(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}}$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}}$　(4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}}$

【討論1】

對於這個矩陣乘法，我們可以有幾何意義的解釋嗎？

(1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$在坐標平面上代表什麼？

(2) $\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$在坐標平面上可以代表什麼？

(3)猜一猜$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$的意義可能是什麼？

(1)點坐標　(2)點坐標　(3)函數對應規則

如 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$P'=\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$，$Q'=\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$，$R'=\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$，

則 $AP=P'$，$AQ=Q'$，$AR=R'$，

對於這個矩陣乘法，我們可以視為 $P \xrightarrow{A} P'$，$Q \xrightarrow{A} Q'$，$R \xrightarrow{A} R'$，

也就是說，將矩陣 A 視為一個函數，型如：$x \xrightarrow{f} f(x)$，

教學補充・搭配學生手冊 P3

■活動 1

[教學活動安排]

(1)檢測學生矩陣乘法運算的熟練度。

(2)做為函數概念的引入題。

[教學注意事項]

讓學生以函數概念引入接受 $AP=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，而非 $PA=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$。

■討論 1

[教學活動安排]

(1)讓學生從坐標平面幾何觀點思考矩陣可代表的意義。

(2)必要時可以提示坐標平面上的點坐標（x , y）可以以矩陣表示嗎？

(3)鼓勵學生說出自己的想法，並且說明是以何策略得出結論。

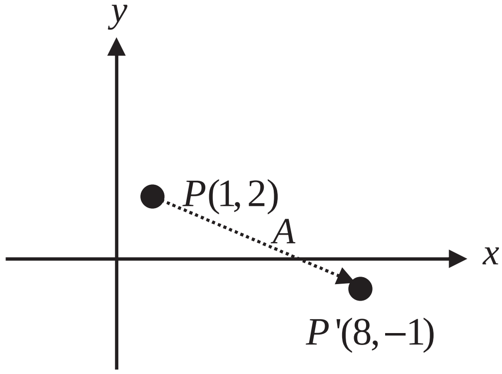
[教學注意事項]

可事先安排分組活動或是請學生就近與同學合成一組討論。

只是這裡需看成是：

將點$(1,2)$透過矩陣 A 轉換得到點$(8,-1)$；點$(0,3)$透過矩陣 A 轉換得到點$(9,-3)$；點$(-2,1)$透過矩陣 A 轉換得到點$(-1,-3)$，所以我們將平面上的點(x,y)寫成 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的形式，則上式就可以解釋成矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 作用在點 $P(1,2)$上，得到點 $P'(8,-1)$，亦即矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$可視為將點 $P(1,2)$變換為點 $P'(8,-1)$的一個動作，如右圖所示。

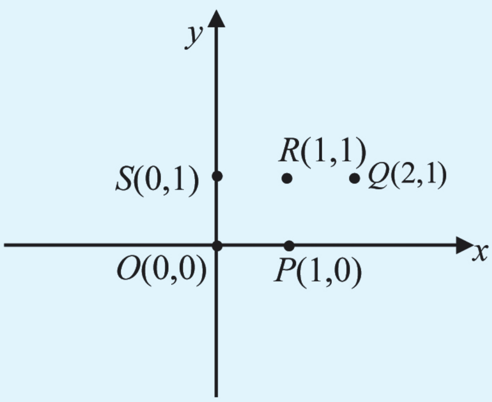
用這個觀點來看，**矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 即代表一個平面上點與點之間的一個變換規則**（簡稱為**變換**）。



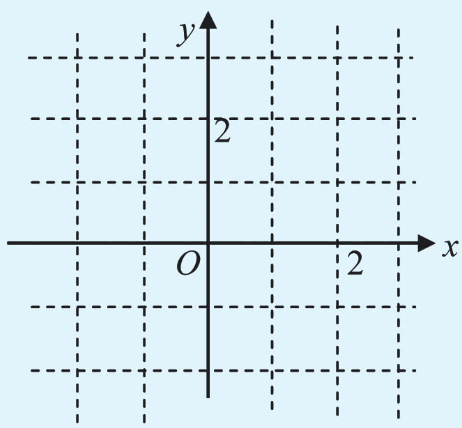
活動 2

圖一中有五個點，分別為點 $O(0,0)$、點 $P(1,0)$、點 $Q(2,1)$、點 $R(1,1)$、點 $S(0,1)$，矩陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，請試在圖二中描繪出 O、P、Q、R、S 經矩陣 A 變換後的五個點 O'、P'、Q'、R'、S' 分別所對應的位置。

詳細解答參見右頁。



圖一



圖二

教學補充・搭配學生手冊 P4

[教學活動安排]

函數概念的引入，建立 $AP=P'$ 即 $P \xrightarrow{A} P'$ ，將矩陣 A 視為一個函數的概念即可完整建立。

■活動 2

[教學活動安排]

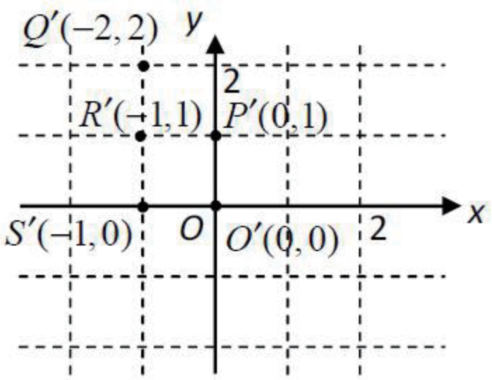
⑴能利用矩陣乘法來表示平面上的點經變換後對應點的位置關係。

⑵加強函數對應概念。

[教學注意事項]

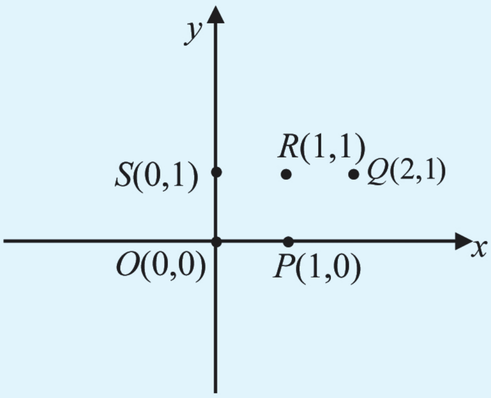
教師可透過走動觀察學生作答。

[活動 2 解答]

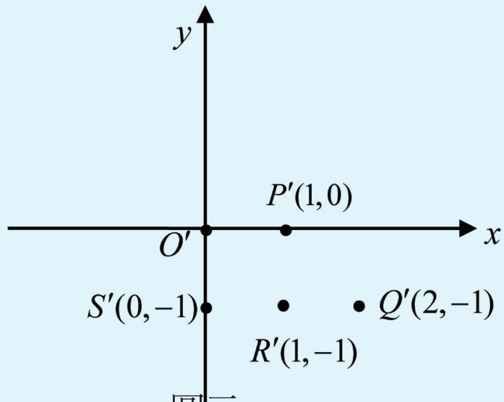


活動 3 分組討論

1. 若矩陣 B 將 O、P、Q、R、S 五點變換至圖三的五個對應點 O'、P'、Q'、R'、S'，要如何求出 B，請提出你的策略，並說明如何確定你的答案是正確的？



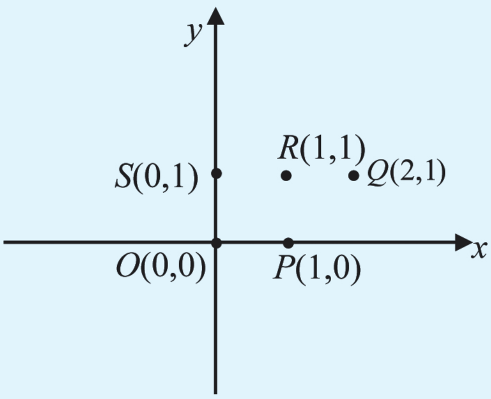
圖一



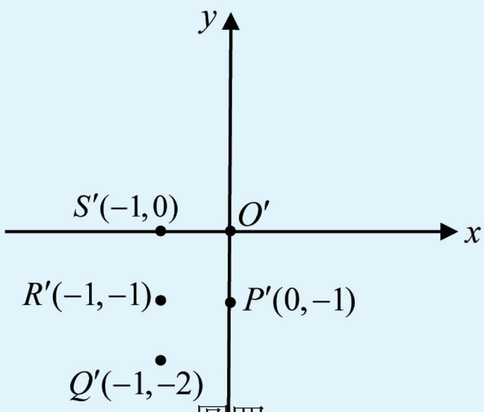
圖三

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

2. 若矩陣 C 將 O、P、Q、R、S 五點變換至圖四的五個對應點 O' 、P' 、Q' 、R' 、S' ，要如何求出 C，請提出你的策略，並說明如何確定你的答案是正確的？



圖一



圖四

$$C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

教學補充・搭配學生手冊 P5

■活動 3 第 1 題

[教學活動安排]（教師帶領學生發表方法，再歸納出性質）

⑴能利用平面上的點經變換後對應點的位置關係找出對應的變換矩陣。

⑵此為對稱 x 軸的變換，學生策略大致可分下列幾種：

①直覺型：看出對稱，直接寫出對應矩陣。

②謹慎型：雖已有感覺但不放心，所以假設變換矩陣 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$，找二點代入解方程式。

③代數型：無直觀概念,所以直接假設變換矩陣 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$，找二點代入解方程式。

若 $B=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 欲將 P（1，0）、Q（2，1）兩點變換為 P'（1，0）、Q'（2，−1）時，

可合併為一個式子 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 來表達。

④解方程式過程中可利用反矩陣概念解之。

[教學注意事項]

⑴當學生提出答案時，需進一步問其策略為何？

⑵以代點解方程式，大概都是代入二點，請問學生為何只代二點即可，其他的點不用嗎？二點又是用那二點代入？每個學生代入的點可能皆不同，可以請學生發表。

若有以點（1,0）與點（0,1）代入者，可與其他點代入者比較其計算過程的繁雜。

⑶可透過請學生發表其策略，多了解學生的想法，並鼓勵學生彼此多討論交流。

■活動 3 第 2 題

[教學活動安排]

⑴能利用平面上的點經變換後對應點的位置關係找出對應的變換矩陣。

⑵與第 1 題略不同，點 P（1，0）變換至點 P'（−1，0），讓學生可利用由第 1 題所得策略再多一次練習，加深概念學習。

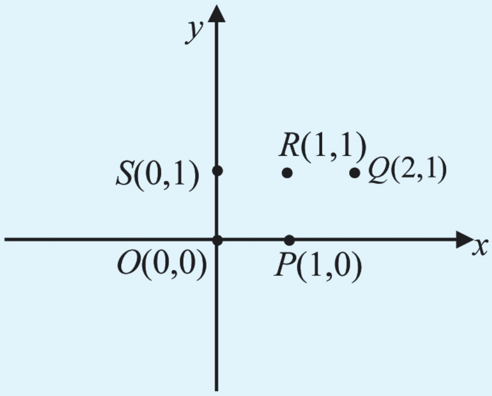
⑶若 $C=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 欲將 P（1，0）、Q（2，1）兩點變換為 P'（−1，0）、Q'（−1，−2）時，

可合併為一個式子 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 來表達，利用反矩陣求出 C。

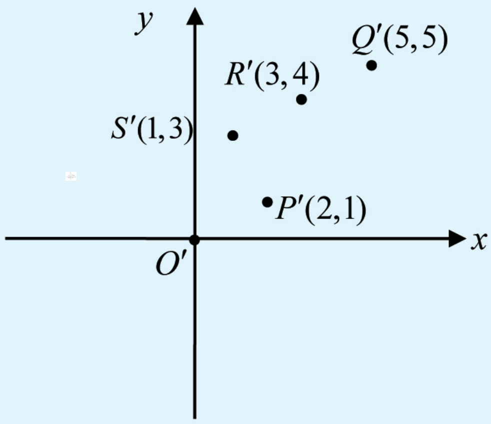
⑷發現只要使用（1,0）與（0,1）即可推導出變換矩陣。

（這個概念這裡未必建立，有感覺但只一個例子不能肯定）

3. 若矩陣 D 將 O、P、Q、R、S 五點變換至圖五的五個對應點 O'、P'、Q'、R'、S'，要如何求出 D，請提出你的策略，並說明如何確定你的答案是正確的？



圖一



圖五

$D=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

【討論 2】

1. 觀察活動三的三個變換前後的圖形，有沒有哪一個點是不動點？原點
2. 已知一個圖形經由某個矩陣變換後得到另一個圖形，如何從原始圖形坐標和變換後的圖形坐標來求出此變換矩陣呢？我們要代入圖形中所有的點嗎？一個點夠嗎？二點，不夠
3. 你認為知道原圖形通過哪些點坐標及其變換後的點坐標，就可以更有效率的求出變換矩陣？點(1，0)與(0，1)

教學補充．搭配學生手冊 P6

■活動 3 第 3 題

[教學活動安排]

⑴能利用平面上的點經變換後對應點的位置關係找出對應的變換矩陣。

⑵此題不易直觀看出，學生可能由二個方向嘗試：

①代二點解方程式：若 $D=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 欲將 $P(1,0)$、$Q(2,1)$ 兩點變換為 $P'(2,1)$、$Q'(5,5)$ 時，可合併為一個式子 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ 來表達。

②若是已由前二圖中感受到變換矩陣似乎與二點 $(1,0)$ 與 $(0,1)$ 的變換有關，可能大膽猜測再行驗證。若 $D=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 欲將 $P(1,0)$、$S(0,1)$ 兩點變換為 $P'(2,1)$、$S'(1,3)$ 時，可合併為一個式子 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 來表達。

[教學注意事項]

⑴多請幾位同學發表其策略，同樣是解方程式，也請問其所代點為何？

⑵請問大膽猜測的同學如何驗證？

⑶此處須慢慢來，觀念建立不可急躁，可透過多請學生發表其策略，多了解學生的作法，給予方向引導。

■討論 2

[教學活動安排]

⑴觀察出原點變換依然是原點，$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，稱原點為不動點，作為向量變換的前導。

⑵經由活動 3 的三個小題，學生應可回答此題，但可再提問：二點可否為原點與其他點搭配。

⑶可適時給予學生提示，請其觀察活動 3 所得三個變換矩陣與圖形的關係。

[教學注意事項]

⑴原點為不動點的概念要建立。

⑵討論2 第 2 題可能有學生回答 3 點，請再進一步問是哪三點，可能是原點與其他二點。

活動 4

1. 請找出點 O（0，0）、（1，0）與（0，1）經二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 變換後的點坐標分別為何？ $(0,0)$、(a,b)、(c,d)

2. 向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 經二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 變換後分別為何？ 向量(a,b)與向量(c,d)

任務 1

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，

請問上述矩陣所代表的變換，各將點（1，0）與（0，1）變換為哪兩點？

A：$(1,0)$與$(0,-1)$

B：$(3,0)$與$(2,-1)$

C：$(4,2)$與$(-1,3)$

教學補充．搭配學生手冊 P7

■活動 4

[教學活動安排]

⑴透過矩陣乘法找到變換後的點坐標。

⑵由此將活動 3 的概念作總結。

⑶活動 4 的第 2 題結合原點變換到原點的概念，向量由二點組成，建立點變換到點，向量變換到向量的概念。

[教學活動安排]

⑴安排類題讓學生演練，鞏固概念，確立由點 $(1,0)$ 與點 $(0,1)$ 的變換來找出變換矩陣，能了解要計算變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$，利用 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 即可尋得。

⑵任務 1：強化基底概念。

任務 2：由點 $(1,0)$ 與點 $(0,1)$ 的變換來找出變換矩陣。

任務 3：利用此題協助學生鞏固概念。

任務 4：強調給與二點及其對應點即可決定一個線性變換，求此線性變換的方法可以用反矩陣或解線性方程組，並以此為引言，導出直線映至直線的概念。

⑶可讓學生上台演練。

任務 2

1. 如果一個變換矩陣 A 使得 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{A}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\xrightarrow{A}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$，

 則變換矩陣 A 為何？

 $A=\begin{bmatrix}3&4\\-1&3\end{bmatrix}$

2. $A\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ 的結果為 $\underline{\begin{bmatrix}17\\3\end{bmatrix}}$。

任務 3

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}$，

(1)求點 O（0 , 0）經過 A 作變換後所對應的點 O' 的坐標為 <u>（0 , 0）</u>。

(2)求點 P（4 , 1）經過 A 作變換後所對應的點 P' 的坐標為 <u>（13 , 22）</u>。

(3)求 $\overrightarrow{OP}=$（4 , 1）經過 A 作變換後所對應的向量 $\overrightarrow{O'P'}$ 為 <u>（13 , 22）</u>。

(1) $A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，

 所以點 O (0 , 0) 經過 A 作變換後所對應的點 O' 的坐標為 (0 , 0)。

(2)過 $A\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\22\end{bmatrix}$，

 所以點 P (4 , 1) 經過 A 之變換後所對應的點 P' 的坐標為 (13 , 22)。

(3) $\overrightarrow{OP}=(4,1)$ 又 $\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\22\end{bmatrix}$，

 所以 $\overrightarrow{O'P'}=(13,22)$。

教學補充・搭配學生手冊 P8

任務 4

設平面上的一線性變換 A 使得 $\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}\xrightarrow{A}\begin{bmatrix}8\\-38\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\xrightarrow{A}\begin{bmatrix}7\\-26\end{bmatrix}$，

試求矩陣 A 。

由已知得 $A\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\-38\end{bmatrix}$，且 $A\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-26\end{bmatrix}$，

此兩式可合併成 $A\begin{bmatrix}4&3\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&7\\-38&-26\end{bmatrix}$，

由矩陣的運算知

$$A=\begin{bmatrix}8&7\\-38&-26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\-2&-1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}8&7\\-38&-26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\-7&5\end{bmatrix}。$$

教學補充・搭配學生手冊 P9

2 線性組合觀點看線性變換

活動 5

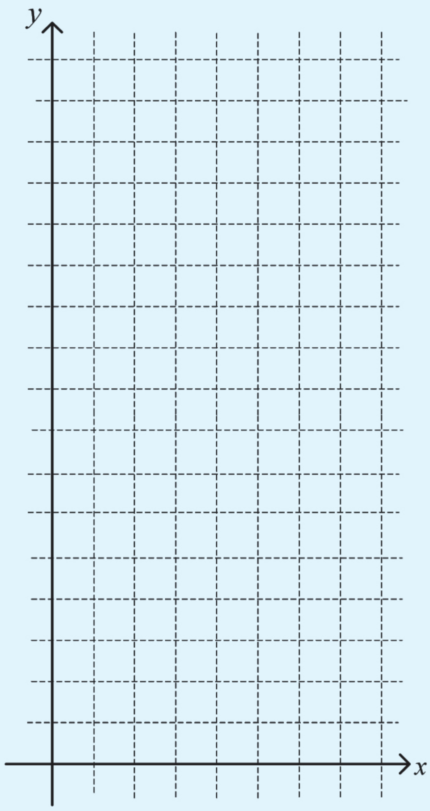
若變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，又

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，視為 $\overrightarrow{i}=(1,0)\xrightarrow{A}\overrightarrow{u}=(2,1)$；

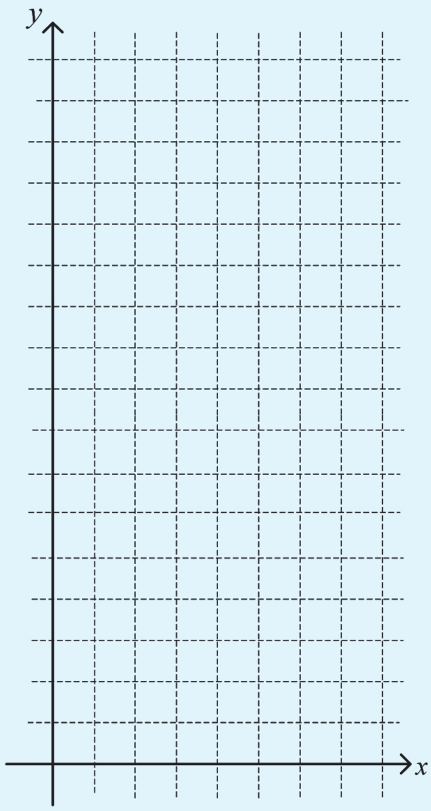
$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$，視為 $\overrightarrow{j}=(0,1)\xrightarrow{A}\overrightarrow{v}=(1,4)$；

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$，視為 $\overrightarrow{p}=(2,3)\xrightarrow{A}\overrightarrow{k}=(7,14)$。

(1)請在下方左邊的坐標平面上畫出 $\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{p}$，並於下方右邊的坐標平面上畫出 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$、$\overrightarrow{k}$ 上述六個向量所對應的位置。（以原點為向量的起點）



$$\xrightarrow{A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}$$



教學補充・搭配學生手冊 P10

■活動 5

[教學活動安排]

⑴此處目標要介紹平面到平面：$A(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=A(\overrightarrow{u})+A(\overrightarrow{v})$與 $A(k\overrightarrow{u})=kA(\overrightarrow{u})$，所以透過先讓學生在坐標平面上畫出向量 $\overrightarrow{p}=2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}$ 的線性組合與經矩陣 A 變換後所得向量 $\overrightarrow{k}=2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$ 的線性組合關係式，請學生觀察二者的關係。

⑵適時給與提示引導學生觀察出基底的變換。

[教學注意事項]

⑴老師可以給與提示，複習平面向量中線性組合概念。

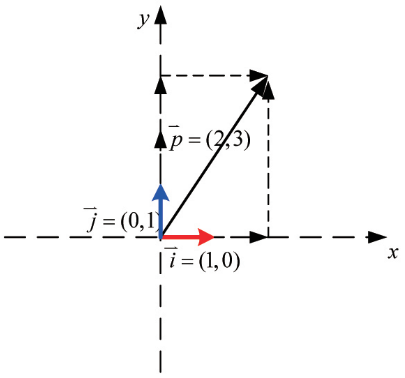
⑵可適時讓學生讀誦課文內容，加強觀念吸收。

(2)利用矩陣運算規則，可得運算式如下：

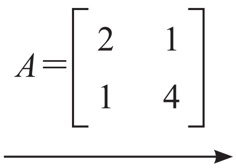
請利用圖形解釋下列算式所代表的意義。

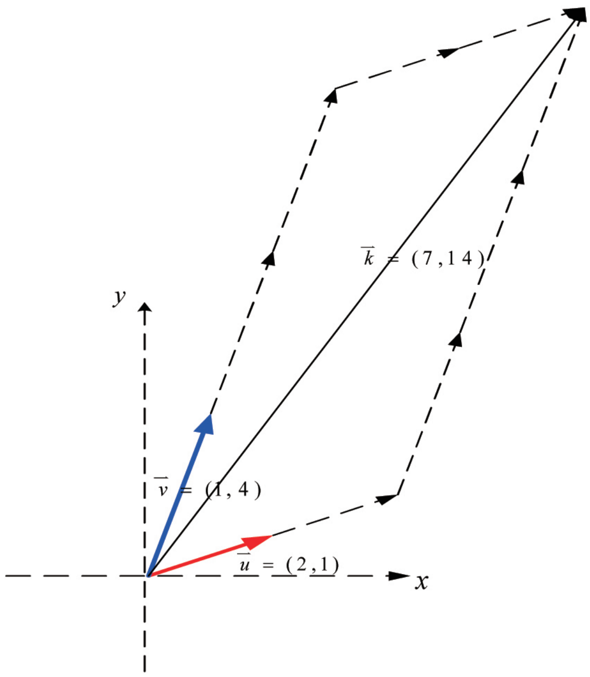
$$\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\left(2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\14\end{bmatrix}$$



圖六





圖七

現在我們以向量觀點來看點的變換，如點（2，3）視為向量 $\overrightarrow{p}=(2,3)$，因為平面上任何向量皆可以二個不平行的非零向量作線性組合，所以

$\overrightarrow{p}=(2,3)=2(1,0)+3(0,1)=2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}$，如圖六，

$\overrightarrow{k}=(7,14)=2(2,1)+3(1,4)=2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$ 仍保有線性組合概念，如圖七。

教學補充・搭配學生手冊 P11

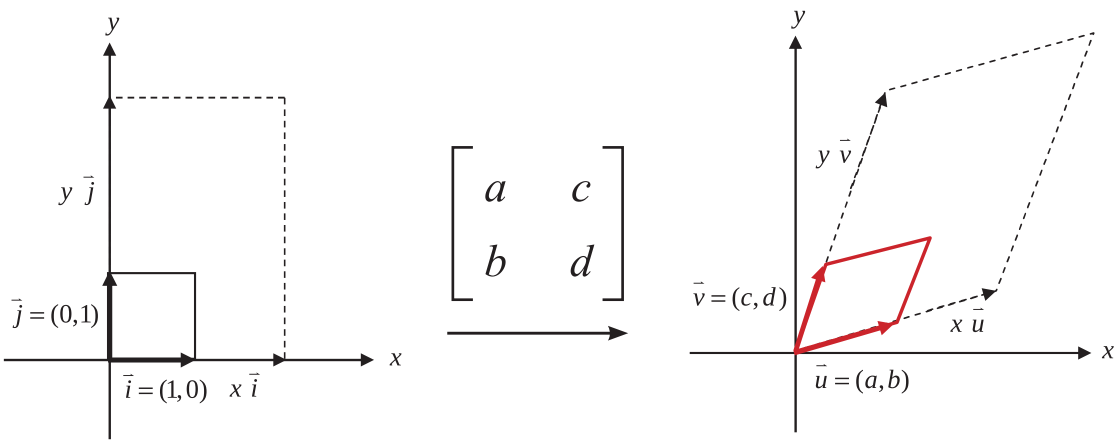
因為線性變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 可將向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 變換到向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$，向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 變換到 $\overrightarrow{v}=(c,d)$，所以我們只要知道 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 的變換，即可得二階變換矩陣 A。

向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 是這個變換 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 將向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 變換後的結果，

向量 $\overrightarrow{v}=(c,d)$ 是這個變換 $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 將向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 變換後的結果。

因為 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=x(\overrightarrow{u})+y(\overrightarrow{v})=x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$，

由矩陣的係數積與分配律性質，可得 $A\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=x\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)+y\left(A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ 為一線性組合，故矩陣 A 被稱為**線性變換**。也就是說，A 將所有的向量從以 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 和 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 為基底的向量空間（直角坐標系）變換到一個以向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 和 $\overrightarrow{v}=(c,d)$ 為基底的向量空間（斜角坐標系），向量 (x,y) 被 A 矩陣變換為向量 $x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$，如下圖八。



圖八

只要能求得 $\overrightarrow{i}=(1,0)\rightarrow\overrightarrow{u}=(a,b)$ 和 $\overrightarrow{j}=(0,1)\rightarrow\overrightarrow{v}=(c,d)$，

這個變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 就能得知。

教學補充．搭配學生手冊 P12

【討論 3】

觀察圖八中，由 $\overrightarrow{i}=(1,0)$和 $\overrightarrow{j}=(0,1)$張成的平行四邊形面積 A_1 與由向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$和 $\overrightarrow{v}=(c,d)$張成的平行四邊形面積 A_2，二者面積有何關係？

$|ad-bc|$

【討論 4】

已知「點經過矩陣變換亦為點，向量經過矩陣變換亦為向量」，那麼直線經過矩陣變換亦為直線嗎？並請說明原因。

教學補充・搭配學生手冊 P13

■討論 3

[教學活動安排]

⑴複習平面向量中以向量計算平行四邊形面積，$A_2=\left\|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right\|=\left\|\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\right\|=|\det A|$。

⑵為變換後面積關係做前行，即建立線性組合關係不變，但基底改變，所以面積比為二個基底的面積比。

■討論 4

[教學活動安排]

⑴引導學生思考直線可由向量與點組成，所以直觀上學生會認為直線會變換到直線。

⑵此處的向量需為方向向量，但此處先不明講，利用任務 5 引出法向量不可使用的觀念衝突，進而補充線性變換不一定保長、保角、保面積。

觀察任務 4，可將之視為二點 $P(4,-2)$，$Q(3,-1)$ 經矩陣 $A=\begin{bmatrix}3&2\\-7&5\end{bmatrix}$ 分別變換到二點 $P'(8,-38)$，$Q'(7,-26)$，又二點決定一直線，若將之視為直線 PQ 經矩陣 A 變換到直線 $P'Q'$，是否直線 PQ 上每一點皆可對應到直線 $P'Q'$ 上？我們做以下初步的檢驗：

先求出直線 PQ 方程式為 $x+y=2$，直線 $P'Q'$ 方程式為 $12x+y=58$，直線 PQ 上另一點 $R(5,-3)$，因為 $\begin{bmatrix}3&2\\-7&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-50\end{bmatrix}$，所以點 $R(5,-3)$ 對應到點 $R'(9,-50)$，點 R' 在直線 $P'Q'$ 上。

直線可由點及方向向量組成，又點經過矩陣變換亦為點，向量經過矩陣變換亦為向量，所以我們將直線 L 以參數式 $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$，$t\in R$ 表示，$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 即 L 上任一點 (x,y) 可表示為 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，變換矩陣為 A。

因為 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A\left(\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+tA\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0'\\y_0'\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}$，

其中 $\begin{bmatrix}x_0'\\y_0'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，所以矩陣 A 把直線 L 變換成一直線 L'。

任務 5

設 A 是平面上的線性變換，$A=\begin{bmatrix}3&-1\\0&-2\end{bmatrix}$，直線 L：$2x+y-4=0$，求直線 L 經矩陣 A 變換後的直線方程式。（請寫出二種以上的解法）。

解法一、二、三參見學生手冊 P29、30，或是教師手冊 P54、55。

教學補充・搭配學生手冊 P14

[教學活動安排]

⑴此處不特別強調 $det(A)\neq 0$。

⑵若 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$，則 $A\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u+2v\\ 3u+6v\end{bmatrix}$，

因為 $3(u+2v)-(3u+6v)=0$，

因此 $Q(u+2v, 3u+6v)$ 必在直線 $y=3x$ 上，也就是說，

A 將坐標平面上每一點映到直線 $y=3x$ 上。

一般情形：

當 $A=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，但 A 的行列式 $det(A)=0$（即 $ad-bc=0$）時，

A 將點 $P(u, v)$ 映到點 $P'(au+cv, bu+dv)$。

因為 $b(au+cv)-a(bu+dv)=0$，

所以點 $P'(au+cv, bu+dv)$ 必在直線 $bx-ay=0$ 上，

因此 A 將坐標平面上每一點映到通過原點的一直線上。

事實上，A 將坐標平面映成此直線。

■活動 5

[教學活動安排]

⑴讓學生統整概念，引導其一題多解。

⑵解法一：直線上找二點，分別算出其變換後的點坐標。

解法二：利用直線的方向向量與點坐標。

解法三：利用新舊坐標關係式。

（解法一、二、三參見學生手冊 P29、30，或是教師手冊 P54、55。）

[教學注意事項]

學生使用法向量與點發現不正確，如何引導其發現矛盾之處，可請學生觀察 P13 頁中的變換前向量 $\overrightarrow{i}$ 向量與向量 $\overrightarrow{j}$ 垂直，變換後向量 $\overrightarrow{u}$ 與向量 $\overrightarrow{v}$ 不一定垂直，所以不可使用法向量。

貳　平面上特殊的線性變換

這裡我們要介紹平面上常見的四種變換：伸縮、旋轉、鏡射與推移，又因為線性變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 可將向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 變換到向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$，向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 變換到向量 $\overrightarrow{v}=(c,d)$，又 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=x\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)+y\left(A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$，所以我們只要知道 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 的變換，即可得二階變換矩陣 A，所以在這裡我們將尋找 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 經由四種變換：伸縮、旋轉、鏡射與推移而變換到新向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 與 $\overrightarrow{v}=(c,d)$，進而找到變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$。

1 伸縮變換

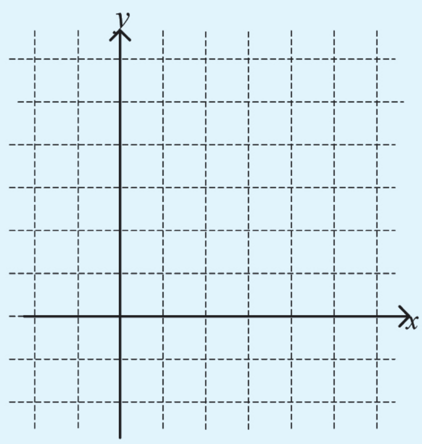
活動 6

請找出坐標平面上，以原點 O 為中心，將 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 沿水平向伸縮 r 倍 $(r>0)$，鉛直向伸縮 s 倍 $(s>0)$ 的向量為何？

因為 $\overrightarrow{i}=(1,0)\to(r,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)\to(0,s)$，

且 $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$，

所以伸縮矩陣為 $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$。



教學補充・搭配學生手冊 P15

■活動 6

［教學活動安排］

讓學生掌握基底概念，利用 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 的變換尋找出伸縮變換矩陣。

［教學注意事項］

(1)讓學生在坐標平面上繪製，由二基底變換找出。

(2)以 *GGB* 軟體展示如何利用二階方陣來控制圖形的變換，老師們可參考 *geogebra* 示範教學影片 *https://www.youtube.com/watch?v=lUyJM-usbvo&list=PLXH05kw-i_5L7bKMjcmLxgTnWZjE3CUuV&index=4* 來製作屬於自己的範例圖片。

(3)建議搭配 *GGB* 軟體，可讓學生直接看到圖片的各種變換。

坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x, y)$ 沿水平向伸縮 r 倍$(r>0)$，鉛直向伸縮 s 倍$(s>0)$，得點 $P'(x', y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，

並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$ 為伸縮變換矩陣。

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}}$$

2 旋轉變換

我們介紹以**原點為中心**旋轉 θ 角的變換（θ 大於 0 時，表逆時鐘方向旋轉；θ 小於 0 時，表順時鐘方向旋轉）。

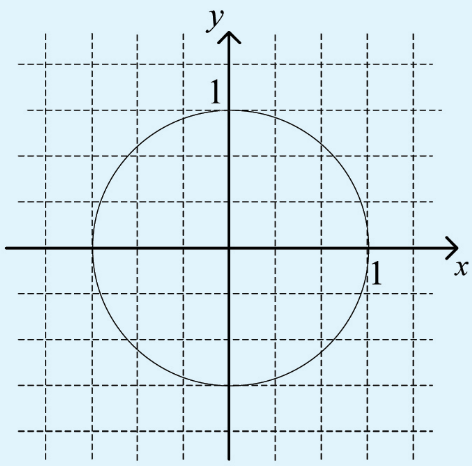
活動 7

請找出坐標平面上，以原點 O 為中心，

將 $\overrightarrow{i}=(1, 0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0, 1)$

旋轉 θ 角後的向量為何？

解答如右頁所示。



教學補充・搭配學生手冊 P16

■活動 7

[教學活動安排]

⑴讓學生掌握基底概念，利用 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 的變換尋找出旋轉矩陣。

⑵利用旋轉變換的保長性質，知道 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 長度皆為 1，所以落在半徑為 1 的圓上，只要掌握角度，即可寫出參數坐標。

⑶複習三角函數和角公式。

[教學注意事項]

⑴讓學生在坐標平面上繪製，由二基底變換找出。

⑵以 *GGB* 軟體展示如何利用二階方陣來控制圖形的變換，老師們可參考 *geogebra* 示範教學影片 *https://www.youtube.com/watch?v=lUyJM-usbvo&list=PLXH05kw-i_5L7bKMjcmLxgTnWZjE3CUuV&index=4* 來製作屬於自己的範例圖片。

⑶建議搭配 *GGB* 軟體，可讓學生直接看到圖片的各種變換。

■活動 7 參考解答

因為將 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 旋轉 θ 角

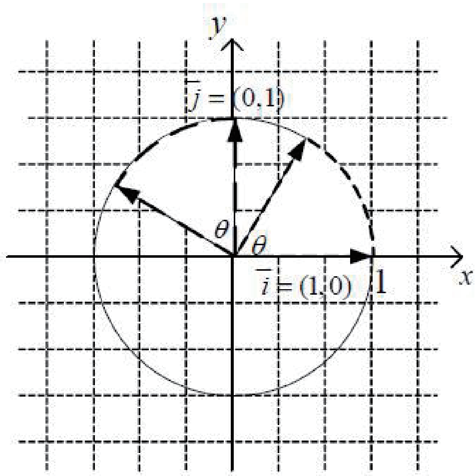
得 $\overrightarrow{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$

將 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 旋轉 θ 角

得 $\overrightarrow{v}=(\cos(90^\circ+\theta),\sin(90^\circ+\theta))$

$=(-\sin\theta,\cos\theta)$

所以稱矩陣 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣。



坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x, y)$ 依逆時針方向旋轉 θ 角後得點 $P'(x', y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣。

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}}$$

任務 6

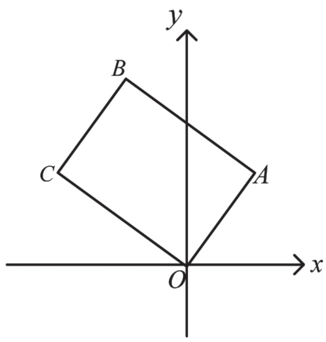
設△OAB 為正三角形且 $O(0, 0)$，$A(4, 2)$，求 B 點的坐標。

$(2-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+1)$ 或 $(2+\sqrt{3}, -2\sqrt{3}+1)$

詳解如右頁所示。

任務 7

如圖所示，$OABC$ 為一矩形，已知 $\overline{OP}=\sqrt{3}\,\overline{OA}$，且 A 點坐標為 $(3, 4)$，試求 B 點的坐標。



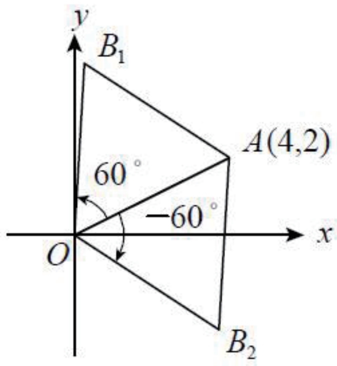
$(3-4\sqrt{3}, 3\sqrt{3}+4)$

詳解如右頁所示。

教學補充・搭配學生手冊 P17

■任務 6 的答案

以 O 為旋轉中心將 $\overrightarrow{OA}$ 旋轉 60° 或-60° 可得 B 點，



因此可得 $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}+1 \end{bmatrix}$

與 $\begin{bmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}+1 \end{bmatrix}$

所以 B 點坐標為 $(2-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+1)$ 或 $(2+\sqrt{3}, -2\sqrt{3}+1)$。

■任務 7 的答案

因為$\overline{OC}=\sqrt{3}\ \overline{OA}=\sqrt{3}\ \overline{AB} \to \overline{OB}=2\overline{OA}$，

所以$\angle AOB=60^\circ$，$\overline{OB}=2\overline{OA}$，

將 $\overrightarrow{OA}$ 以 O 點為旋轉中心旋轉 60° 角，再伸縮 2 倍，以矩陣表示為

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-4\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}+4 \end{bmatrix}$

所以 B 點坐標為 $(3-4\sqrt{3}, 3\sqrt{3}+4)$。

3 鏡射變換

需討論以那一條直線為對稱軸的鏡射變換。

⑴對 x 軸作鏡射：$\overrightarrow{i}=(1,0)\to\overrightarrow{u}=(1,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)\to\overrightarrow{v}=(0,-1)$，

所以鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$。

⑵對 y 軸作鏡射：$\overrightarrow{i}=(1,0)\to\overrightarrow{u}=(-1,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)\to\overrightarrow{v}=(0,1)$，

所以鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$。

⑶對直線 $x=y$ 作鏡射：$\overrightarrow{i}=(1,0)\to\overrightarrow{u}=(0,1)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)\to\overrightarrow{v}=(1,0)$，

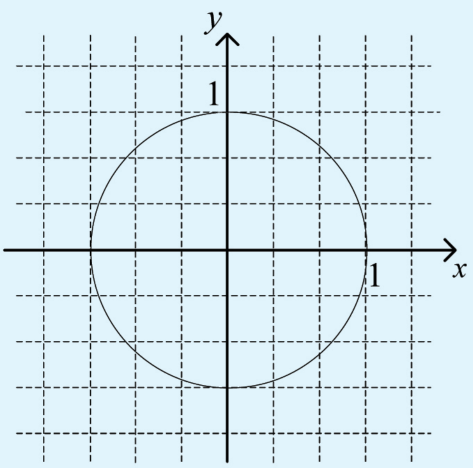
所以鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$。

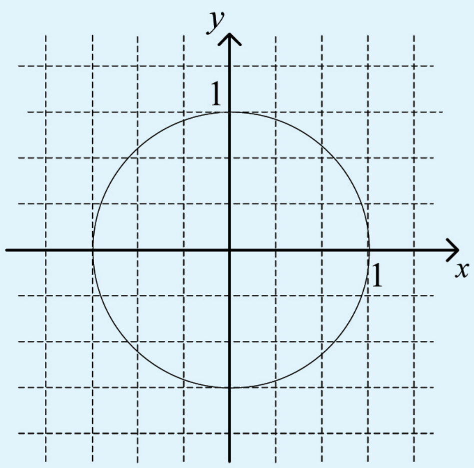
若對稱軸為一般直線呢？其對稱直線為 $y=mx=(\tan\theta)x$，請看：

活動 8

直線 L 是過原點且與 x 軸正向夾 θ 角的直線，其方程式為 $y=mx=(\tan\theta)x$，求 $\overrightarrow{i}=(1,0)$與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$對直線 L 做鏡射所得向量分別為何？

解答如右頁所示。





教學補充．搭配學生手冊 P18

鏡射變換

[教學活動安排]

此處利用基底變換即可寫出變換矩陣,讓學生再次強化概念。

■活動 8

[教學活動安排]

⑴讓學生掌握基底概念，利用 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 的變換尋找出鏡射矩陣。

⑵利用旋轉變換的保長性質，知道 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 長度皆為 1，所以落在半徑為 1 的圓上，只要掌握角度，即可寫出參數坐標。

⑶複習三角函數和角公式。

⑷因為 $\overrightarrow{v}$ 的有向角較不易寫出，可由 $\overrightarrow{i}$ 與 $\overrightarrow{j}$ 夾 90°，所以 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 也夾 90°（保角性質），又 $\overrightarrow{u}$ 的有向角為 2θ，所以 $\overrightarrow{v}$ 的有向角為 $2\theta-90^\circ$ 。

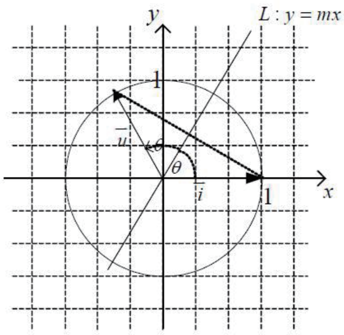
[教學注意事項]

⑴讓學生在坐標平面上繪製，由二基底變換找出。

⑵以 *GGB* 軟體展示如何利用二階方陣來控制圖形的變換，老師們可參考 *geogebra* 示範教學影片 *https://www.youtube.com/watch?v=lUyJM-usbvo&list=PLXH05kw-i_5L7bKMjcmLxgTnWZjE3CUuV&index=4* 來製作屬於自己的範例圖片。

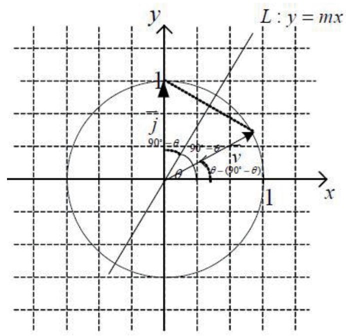
⑶建議搭配 *GGB* 軟體，可讓學生直接看到圖片的各種變換。

■活動 8 參考解答



$\overrightarrow{i}=(1,0)$ 對直線 L 做鏡射所得向量為 $\overrightarrow{u}$，其與 x 軸正向夾 2θ 角，所以

$\overrightarrow{i}=(1,0)\rightarrow\overrightarrow{u}=(\cos2\theta,\sin2\theta)$



$\overrightarrow{j}=(0,1)$ 對直線 L 做鏡射所得向量為 $\overrightarrow{v}$，其與 x 軸正向夾 $\theta-(90^\circ-\theta)=-(90^\circ-2\theta)$ 角，

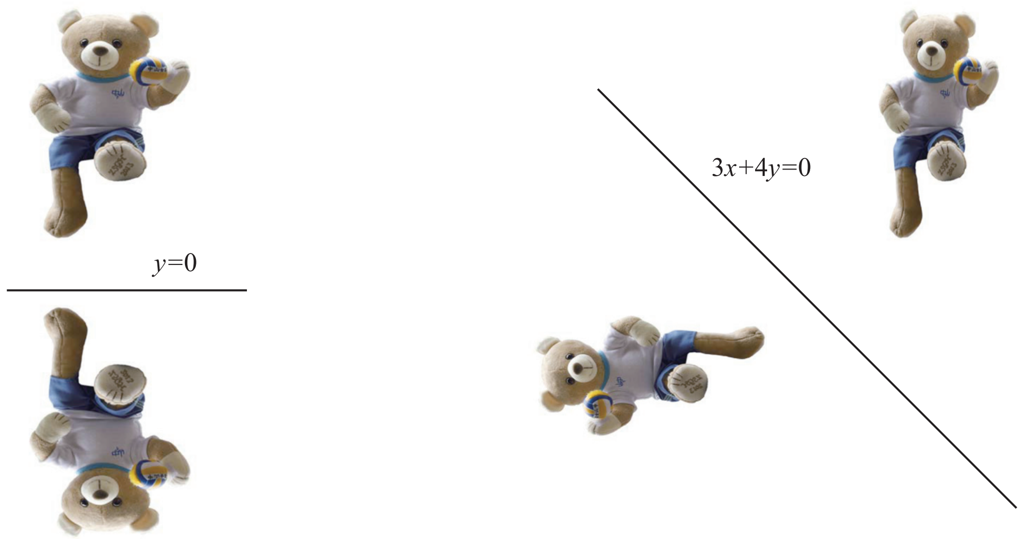
$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}&=(\cos[-(90^\circ-2\theta)],\sin[-(90^\circ-2\theta)])\\&=(\cos(90^\circ-2\theta),-\sin(90^\circ-2\theta))\\&=(\sin2\theta,-\cos2\theta)\end{aligned}$$

所以矩陣 $\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}$ 為鏡射矩陣。

坐標平面上，L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線（$y=mx=(\tan\theta)x$），

若點 $P(x,y)$ 對直線 L 鏡射得點 $P'(x',y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} \\ \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，

並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} \\ \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} \end{bmatrix}$ 為鏡射矩陣。



任務 8

1. 設矩陣 A 表示以直線 L：$x+y=0$ 為對稱軸的鏡射變換，試求矩陣 A。
2. 設矩陣 A 表示以直線 L：$y=2x$ 為對稱軸的鏡射變換，試求矩陣 A，並求點 $P(-2,1)$ 在矩陣 A 變換下的點 P' 為何？

1. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $A=\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$，$P'(2,-1)$

詳解如右頁所示。

教學補充・搭配學生手冊 P19

■任務 8 的答案

⑴因為直線 L：$x+y=0$ 與 x 軸正向夾角為 $\theta=135^\circ$，得 $2\theta=270^\circ$

所以 $A=\begin{bmatrix} cos270^\circ & sin270^\circ \\ sin270^\circ & -cos270^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$。

⑵設直線 L：$y=2x$ 與 x 軸正向夾角為 θ，因為直線 L：$y=2x$ 的斜率為 2，

所以 $tan\,\theta=2$ 且 θ 為銳角，於是得 $cos\,\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$sin\,\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

由二倍角公式得 $cos2\theta=cos^2\theta-sin^2\theta=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$，

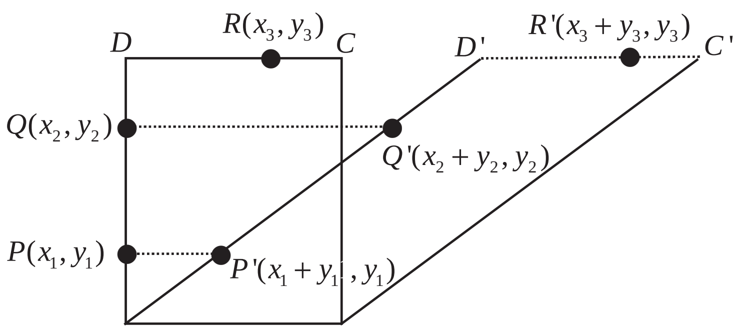
$sin2\theta=2sin\,\theta\,cos\,\theta=2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$，

所以 $A=\begin{bmatrix} cos2\theta & sin2\theta \\ sin2\theta & -cos2\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$，

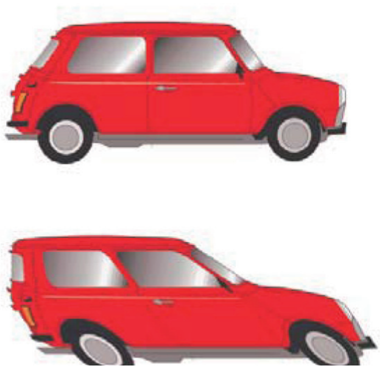
$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$。

4 推移變換

如圖九，已知 $ABCD$ 為一矩形，將矩形下底 $\overline{AB}$ 固定不動，上底 $\overline{CD}$ 向右平行移動(假設 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 是具有伸縮彈性的線)得平行四邊形 $ABC'D'$ ，這就是推移的概念。數學語言為將圖形沿 x 軸方向水平推移 y 坐標的 1 倍，所以點的位置愈高，被推移的距離愈大，產生傾斜的效果。



圖九



推移

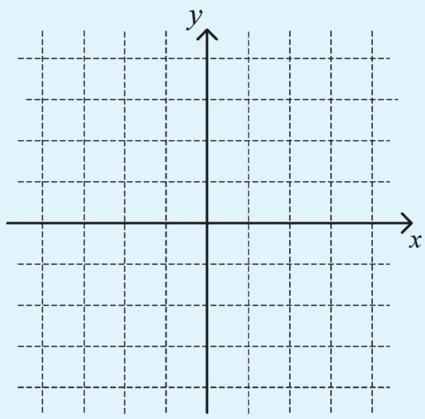
活動 9

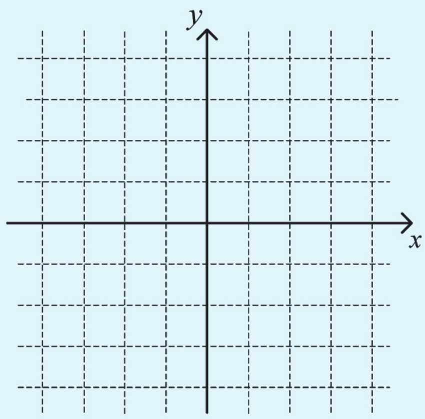
實數 $k>0$，請找出坐標平面上：

(1)將 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 沿 x 軸方向水平推移 y 坐標的 k 倍，其向量為何？

(2)將 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 沿 y 軸方向鉛直推移 x 坐標的 k 倍，其向量為何？

解答如右頁所示。





教學補充・搭配學生手冊 P20

■活動 9

[教學活動安排]

⑴讓學生掌握基底概念，利用 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 的變換尋找出推移矩陣。

⑵將水平推移 $\overrightarrow{i}=(1,0)\rightarrow\overrightarrow{u}=(1+0\times k,0)=(1,0)$，

$\overrightarrow{j}=(0,1)\rightarrow\overrightarrow{v}=(0+1\times k,1)=(k,1)$

鉛直推移 $\overrightarrow{i}=(1,0)\rightarrow\overrightarrow{u}=(1,0+1\times k)=(1,k)$，

$\overrightarrow{j}=(0,1)\rightarrow\overrightarrow{v}=(0,1+0\times k)=(0,1)$

仔細寫出，學生概念更清楚。

[教學注意事項]

⑴學生較不易掌握推移概念，所以在介紹時可多著墨點移動的感覺，如 P、Q、D、C 幾點在水平推移時移動的距離與 y 坐標有關。

⑵讓學生在坐標平面上繪製，由二基底變換找出。

⑶以 *GGB* 軟體展示如何利用二階方陣來控制圖形的變換，老師們可參考 *geogebra* 示範教學影片 *https://www.youtube.com/watch?v=lUyJM-usbvo&list=PLXH05kw-i_5L7bKMjcmLxgTnWZjE3CUuV&index=4* 來製作屬於自己的範例圖片。

⑷建議搭配 *GGB* 軟體，可讓學生直接看到圖片的各種變換。

■活動 9 參考解答

因為 $\overrightarrow{i}=(1,0)\rightarrow\overrightarrow{u}=(1+0\times k,0)=(1,0)$，

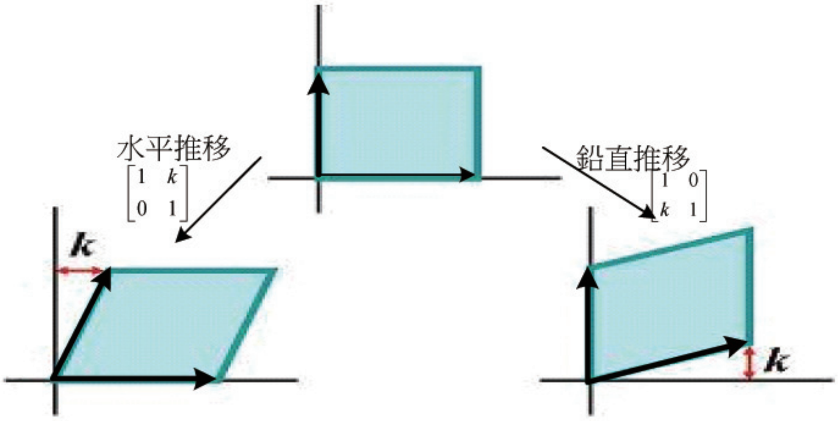
$\overrightarrow{j}=(0,1)\rightarrow\overrightarrow{v}=(0+1\times k,1)=(k,1)$，

又 $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，所以水平推移矩陣為 $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

因為 $\overrightarrow{i}=(1,0)\rightarrow\overrightarrow{u}=(1,0+1\times k)=(1,k)$，

$\overrightarrow{j}=(0,1)\rightarrow\overrightarrow{v}=(0,1+0\times k)=(0,1)$，

又 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$，所以鉛直推移矩陣為 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$。



坐標平面上，

(1)若將點 $P(x,y)$ 沿 x 軸推移 y 坐標的 k 倍，得點 $P'(x',y')$，

則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$ 為水平推移矩陣。

(2)若將點 $P(x,y)$ 沿 y 軸推移 x 坐標的 k 倍，得點 $P'(x',y')$，

則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$ 為鉛直推移矩陣。

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1.3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

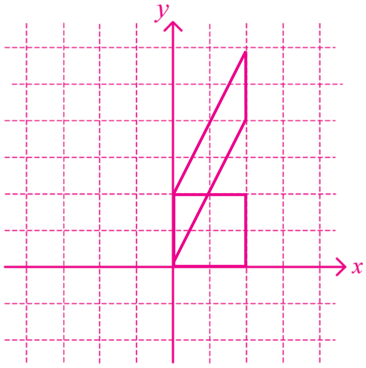
$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.2 & 1 \end{bmatrix}}$$

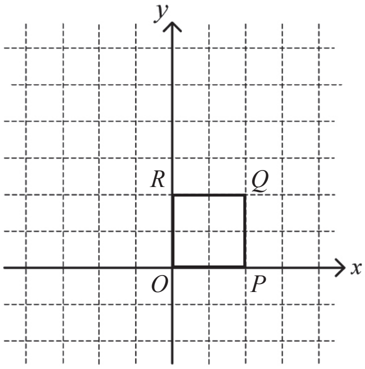
教學補充・搭配學生手冊 P21

任務 9

設坐標平面上一正方形 $OPQR$，其中 $O(0,0)$，$P(2,0)$，$Q(2,2)$，$R(0,2)$，試作此正方形 $OPQR$ 對 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ 作推移變換所得之新圖形。

解答：





任務 10

請寫出二階方陣表示的平面變換為：先對直線 $x=y$ 作鏡射，再鉛直推移 2 倍，再水平方向伸縮 3 倍，最後對 y 軸作鏡射。

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

教學補充．搭配學生手冊 P22

■任務 10

[教學活動安排]

⑴建立合成概念，注意矩陣相乘的次序，其意義不同。

⑵強調矩陣乘法的次序，如 $ABCD\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$是依序對 $D \to C \to B \to A$ 作用。

⑶二階方陣分解成數個基本矩陣的乘積，並可看出其所經變換。

參　線性變換的面積比

線性變換 A 將所有的向量從以 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 和 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 為基底的向量空間（直角坐標系）變換到一個以向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 和 $\overrightarrow{v}=(c,d)$ 為基底的向量空間（斜角坐標系），向量 (x,y) 被 A 矩陣變換為向量 $x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$。由活動 5 知，由基底向量所張成的二平行四邊形面積比為 $1:|det\ A|$，若是任意二向量張成的平行四邊形與經由線性變換矩陣後所得的二向量張成的平行四邊形，二者面積比是否仍然為 $1:|det\ A|$？

令 $\overline{OP}=(x_1,y_1)$，$\overline{OQ}=(x_2,y_2)$ 為平面上二點，矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 為平面上的線性變換矩陣，A 分別將 $\overline{OP}$、$\overline{OQ}$ 變換到 $\overline{OP'}=(x'_1,y'_1)$，$\overline{OQ'}=(x'_2,y'_2)$，

則 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix}$，

$\overline{OP}$ 和 $\overline{OQ}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$，

變換後，$\overline{OP}$ 和 $\overline{OQ}$ 所決定的平行四邊形面積為

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix}\right| &= \left|\begin{vmatrix} ax_1+cy_1 & bx_1+dy_1 \\ ax_2+cy_2 & bx_2+dy_2 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} ax_1+cy_1 & bx_1 \\ ax_2+cy_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax_1+cy_1 & dy_1 \\ ax_2+cy_2 & dy_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{vmatrix} ax_1 & bx_1 \\ ax_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} cy_1 & bx_1 \\ cy_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax_1 & dy_1 \\ ax_2 & dy_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} cy_1 & dy_1 \\ cy_2 & dy_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{vmatrix} cy_1 & bx_1 \\ cy_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax_1 & dy_1 \\ ax_2 & dy_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|ad\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}-bc\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|(ad-bc)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= |det\ A|\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|。
\end{aligned}
$$

教學補充・搭配學生手冊 P23

坐標平面上，在矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 的線性變換下，$\overrightarrow{OP'}$ 和 $\overrightarrow{OQ'}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\overrightarrow{OP'}$ 和 $\overrightarrow{OQ'}$ 所決定的平行四邊形面積的 $|det\ A|$ 倍。同理，$\triangle ABC$ 經矩陣 A 的線性變換後形成 $\triangle A'B'C'$，其面積關係為 $\triangle A'B'C'$ 面積 $=\triangle ABC$ 面積 $\times|det\ A|$。

任務 11

已知 $A(0,0)$，$B(-2,4)$，$C(5,3)$，$\triangle ABC$ 經過矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 推移變換後成 $\triangle A'B'C'$，則 $\triangle A'B'C'$ 之面積為何？

$\overline{AB}=(-2,4)$，$\overline{AC}=(5,3)$，

所以 ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\right|=13$

$\triangle A'B'C'$ 的面積 $=|detA|\triangle ABC$ 面積 $=1\times\triangle ABC$ 面積 $=13$

活動 10

請討論 $\triangle ABC$ 經由四種基本變換：伸縮、旋轉、鏡射、推移對應到 $\triangle A'B'C'$，其變換後面積的變化為何？

伸縮矩陣：$\left|det\left(\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right)\right|=rs$，面積變為 rs 倍。

旋轉矩陣：$\left|det\left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\right)\right|=1$，面積不變。

鏡射矩陣：$\left|det\left(\begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{bmatrix}\right)\right|=1$，面積不變。

推移矩陣：$\left|det\left(\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right|=1$，$\left|det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\right)\right|=1$，面積不變。

教學補充・搭配學生手冊 P24

課後練習

1.令 $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ 將點（1，0）變換至（1，−1），將點（0，1）變換至（−2，1），試求 A。此線性變換 A 將點 $P(-1,1)$ 變換到哪裡？

$$A=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&-2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$$

2.設 $A=\begin{bmatrix}3&2\\1&-3\end{bmatrix}$，試求一點 P 經過 A 的變換後的像為 $Q(1,-7)$。

$$A=\begin{bmatrix}3&2\\1&-3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3&2\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-7\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\1&-3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\-7\end{bmatrix}=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-3&-2\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

3.試求一矩陣 A，使 A 的變換將 $P(2,3)$ 變為 $Q(10,6)$，將 $P'(-1,2)$ 變為 $Q'(9,4)$。

$$A\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&9\\6&4\end{bmatrix}$$

$$\to A=\begin{bmatrix}10&9\\6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}10&9\\6&4\end{bmatrix}\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&1\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4\\0&2\end{bmatrix}$$

4. 直線 L：$3x+y=5$ 被 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換變換到直線 L'，試求直線 L' 的方程式。

直線 L 上找二點 $P(0,5)$，$Q(1,2)$，

$\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$，

由點 $(10,5)$ 與點 $(7,3)$ 所決定的直線 L' 方程式為 $2x-3y=5$。

5. 試描述下列各線性變換的作用。

(1) $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{bmatrix}$　(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$　(4) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$

(1)水平向伸縮 3 倍，鉛直向伸縮 4 倍

(2) y 方向的推移變換

(3)旋轉 -45°（順時針旋轉 45°）

(4)旋轉 30°（逆時針旋轉 30°）

6. 設 $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}$，若平面上兩點 $P(2,1)$，$Q(3,5)$ 在 A 的變換下對應到 P' 和 Q' 兩點，試求 $\overrightarrow{OP'}$ 和 $\overrightarrow{OQ'}$ 決定的平行四邊形面積。

$\overrightarrow{OP}=(2,1)$ 與 $\overrightarrow{OQ}=(3,5)$ 決定的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 5\end{vmatrix}\right|=7$，

由 $\overrightarrow{OP'}$ 和 $\overrightarrow{OQ'}$ 決定的平行四邊形面積為

$|detA|$（$\overrightarrow{OP}=(2,1)$ 與 $\overrightarrow{OQ}=(3,5)$ 決定的平行四邊形面積）

$=14\times7=98$

7. 設直線 L 的方程式為 $y=3x$，二階方陣 A 所對應的線性變換是對直線 L 的鏡射。

(1)試求二階方陣 A。

(2)請計算 A^2。

(3)求點 $P(4,-2)$ 對於直線 L 的對稱點 Q 的坐標為何？

再求點 Q 對於直線 L 的對稱點為何？

(1)設直線 $L:y=3x$ 與 x 軸正向夾角為 θ，因為直線 $L:y=3x$ 的斜率為 3，

所以 $\tan\theta=3$ 且 θ 為銳角，於是得 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，由二倍角公式得

$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{10}-\frac{9}{10}=-\frac{4}{5}$，$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$，

所以 $A=\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$

(2) $A^2=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(3) $AP=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{22}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}\to Q(-\frac{22}{5},\frac{4}{5})$

$AQ=A(AP)=A^2P=1\times P=P\to P(4,-2)$

8.(1)請寫出旋轉 60° 的旋轉矩陣 A。

(2)請計算 A^2。

(3)求點 $P(4,-2)$經過旋轉 60° 的點 Q 坐標為何？

再求點 Q 旋轉 60° 的 R 點為何？

(1) $A=\begin{bmatrix} cos60^\circ & -sin60^\circ \\ sin60^\circ & cos60^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(2) $A^2=\begin{bmatrix} cos60^\circ & -sin60^\circ \\ sin60^\circ & cos60^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos60^\circ & -sin60^\circ \\ sin60^\circ & cos60^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cos120^\circ & -sin120^\circ \\ sin120^\circ & cos120^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(3) $AP=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}\rightarrow Q(2+\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}-1)$

$AQ=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2+\sqrt{3} \\ 1+2\sqrt{3} \end{bmatrix}\rightarrow R(-2+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$

任務參考解答

1. A：（1 , 0）與（0 , −1）；B：（3 , 0）與（2 , −1）；C：（4 , 2）與（−1 , 3）

2. $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}17\\ 3\end{bmatrix}$

3. (1) O'（0 , 0） (2) P'（13 , 22） (3) $\overrightarrow{O'P'}=$（13 , 22）

4. $A=\begin{bmatrix}8 & 7\\ -38 & -26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}8 & 7\\ -38 & -26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -7 & 5\end{bmatrix}$

5. 法一：直線上找二點

直線 L：$2x+y-4=0$ 上找二點 P（2 , 0），Q（0 , 4），

因為 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ -8\end{bmatrix}$，

由 P'（6 , 0），Q'（−4 , −8）可得變換後的直線方程式為 $4x-5y-24=0$

法二：利用直線的方向向量與直線上一點

直線 L：$2x+y-4=0$ 上找一點 P（2 , 0）及直線方向向量為（1 , −2）

因為 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$，

所以變換後的直線上有一點 P'（6 , 0）及方向向量（5 , 4），

可得變換後的直線方程式為 $4x-5y-24=0$。

或直線 L 的參數式為 $\begin{cases}x=t\\ y=-2t+4\end{cases}$（$t\in R$），

因為 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ -2t+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5t & -4\\ -4t & +8\end{bmatrix}$，所以直線 L' 的參數式為 $\begin{cases}x=5t-4\\ y=-4t+8\end{cases}$（$t\in R$），

故 L' 的方程式為 $4x-5y-24=0$。

法三：以新舊坐標變換

$$\begin{bmatrix}3&-1\\0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_1\\y'_1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\0&-2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}x'-\frac{1}{6}y'\\-\frac{1}{2}y'\end{bmatrix}$$

所以將 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}x'-\frac{1}{6}y'\\y=-\frac{1}{2}y'\end{cases}$ 代入 $L：2x+y-4=0$ 得

$2\left(\frac{1}{3}x'-\frac{1}{6}y'\right)+\left(-\frac{1}{2}y'\right)-4=0$

整理可得 $4x'-5y'-24=0$，

所以變換後的直線方程式為 $4x-5y-24=0$。

6. B 點坐標為 $(2-\sqrt{3}\ ,\ 2\sqrt{3}+1)$ 或 $(2+\sqrt{3},-2\sqrt{3}+1)$

7. B 點坐標為 $(3-4\sqrt{3}\ ,\ 3\sqrt{3}+4)$

8. (1) $A=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$　(2) $A=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$，$P'(2,-1)$

9. 略

10. $\begin{bmatrix}0&-3\\1&2\end{bmatrix}$

11. 13

課後練習參考答案

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$(-3, 2)$

2. $(-1, 2)$

3. $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. $2x-3y-5=0$

5. (1)水平向伸縮 3 倍，鉛直向伸縮 4 倍

   (2) y 方向的推移變換

   (3) 旋轉 -45°（順時針旋轉 45°）

   (4) 旋轉 30°（逆時針旋轉 30°）

6. 98

7. (1) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $Q\left(-\frac{22}{5}, \frac{4}{5}\right)$，$P(4, -2)$

8. (1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (3) $Q(2+\sqrt{3}, 2\sqrt{3}-1)$，$R(-2+\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+1)$

深入閱讀

深入閱讀

1.《數學快遞-創刊號 數學與數位圖像》 中央大學 單維彰教授・三民出版社
http://www.sanmin.com.tw/learning/science/highschool/math/%E6%95%B8%E5%AD%B8%E5%BF%AB%E9%81%9E-%E5%89%B5%E5%88%8A%E8%99%9F.pdf

2.《高中 99 課綱》翰林版、全華版、三民版

3. *geogebra* 示範教學影片
https://www.youtube.com/watch?v=lUyJM-usbvo&list=PLXH05kw-i_5L7bKMjcmLxgTnWZjE3CUuV&index=4

教學資料補充

為什麼我們要在這邊介紹這些線性變換呢？可以證明：任何一個有乘法反方陣的二階方陣所代表的線性變換，都可以表示成為以下這四類線性變換一連串組合的結果：

1. 伸縮：$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$，$r>0$，$s>0$

2. 鏡射：$\begin{bmatrix} cos2\,\theta & sin2\,\theta \\ sin2\,\theta & -cos2\,\theta \end{bmatrix}$

3. 旋轉：$\begin{bmatrix} cos\,\theta & -cos\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$

4. 推移：$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

例如：矩陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，

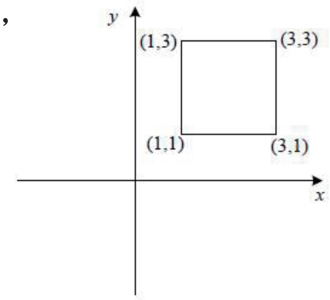
因為 $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3y \\ x+2y \end{bmatrix}$，如何讓點（$x$, y）→（$-3y$, $x+2y$）呢？

將其視為點（x , y）→（y , x）→（y , $x+2y$）→（$3y$, $x+2y$）→（$-3y$, $x+2y$）

$$\text{即}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\underset{\text{（對 }y\text{ 軸作鏡射）}}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}\quad\underset{\text{（水平伸縮 3 倍）}}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}\quad\underset{\text{（鉛直推移）}}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}}\quad\underset{\text{（對直線 }x=y\text{ 作鏡射）}}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}$$

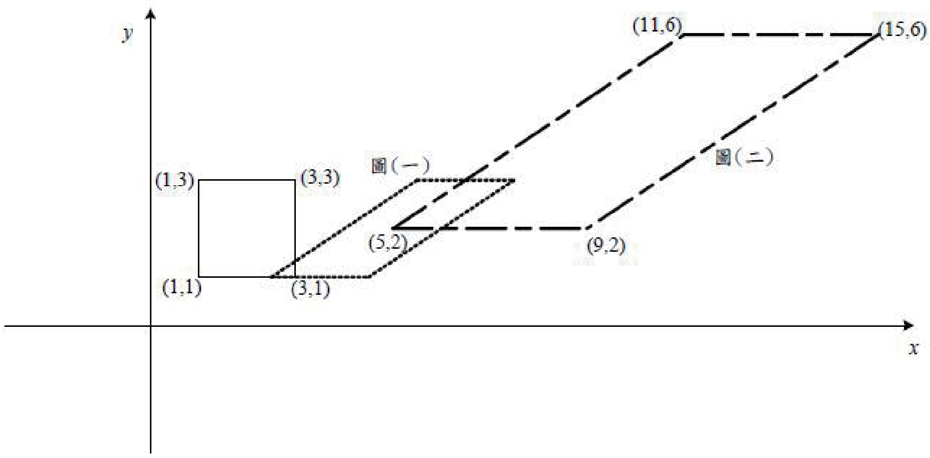
註：此種合成變換未必唯一，同學們也可自己試試其它的方式喔！

如右圖，正方形經由矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的變換後得一新圖形，求此新圖形的面積為________。



【解法一】

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\underset{\text{（水平伸縮 2 倍，鉛直伸縮 2 倍）}}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}}\quad\underset{\text{（水平方向推移）}}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$



如上圖所示，圖（一）表經矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 作用後（水平推移）的圖形；將圖（一）再經矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 作用後（水平方向伸縮 2 倍，鉛直方向伸縮 2 倍）得圖（二）。

圖（二）即為正方形經由矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 變換後所得的圖形。因為推移不會改變面積，所以因為水平伸縮 2 倍，鉛直伸縮 2 倍，所以圖（二）的面積為正方形面積的 $2\times2=4$ 倍，所以圖（二）的面積為 $4\times(2\times2)=16$。

【解法二】

因為$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x+3y \\ 2y \end{bmatrix}$，表點（$x$, y）→（$2x+3y$, $2y$）

令正方形四頂點分別為 A、B、C、D，經矩陣$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$變換後，

四頂點分別為 A'、B'、C'、D'，可得 $\overline{A'B'}=2\,\overline{AB}$，$\overline{A'C'}=2\,\overline{AC}$，

所以變換後新圖形的面積為正方形面積的 4 倍，

故新圖形的面積為 $4\times(2\times2)=16$。

※這題是說我們課程安排就可以不證上面的面積式子，因為四個變換的行列式值知道，配合 $det(AB)=(detA)(detB)$即可，但要證明任何一個有乘法反方陣的二階方陣所代表的線性變換，都可以表示成為這四類線性變換一連串組合的結果。